

Risco de taxa de juro, Duração e Convexidade

Ilustração num contexto do QIS4

Cláudio Torpes Rebelo

Resumo

A volatilidade das taxas de juro tem consequências directas no valor presente dos fluxos monetários (cash flows) futuros. Deste modo, as companhias de seguros estão particularmente expostas ao risco de taxa de juro, vindo este explicitamente reconhecido no projecto de Solvência II.

O objectivo do presente trabalho consiste em aferir se o exercício proposto no QIS4 (*Quantative Impact Study*) é adequado para captar a exposição ao risco de taxa de juro de uma carteira hipotética de acidentes de trabalho em que as provisões técnicas estão representadas por activos de rendimento fixo.

Antes de se analisar o exercício em questão, iremos descrever sucintamente o problema do risco de taxa de juro algumas estratégias de protecção (imunização).

Aproveito, desde já, para agradecer ao Professor Onofre Simões por todo o apoio prestado ao longo deste último ano.

Palavras-chave: Risco de taxa de juro; imunização; duração; convexidade; Solvência II; QIS4.

CONTEÚDO

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Resumo | ii |
| Introdução | 10 |
| | |
| Parte 1 - Risco de taxa de juro num contexto de cash flows certos e choques paralelos..... | 3 |
| 1.1 Função-preço de uma obrigação sem risco de crédito de cupão fixo | 11 |
| 1.2 Taxa de rendimento efectivo..... | 12 |
| 1.3 Duração de Macaulay e Duração modificada | 12 |
| 1.4 Duração como instrumento de imunização de uma obrigação num horizonte temporal | 14 |
| 1.5 Convexidade..... | 15 |
| 1.6 Imunização no contexto de activos e passivos – Condições de Redington | 17 |
| 1.7 Duração de Fisher e Weil..... | 19 |
| 1.8 Estimativas da duração e convexidade..... | 21 |
| 1.9 Limitações dos modelos de duração de Macaulay e Fisher e Weil | 22 |
| | |
| Parte 2 - Risco de taxa de juro num contexto de choques não paralelos..... | 23 |
| 2.1 M-Quadrado | 24 |
| 2.2 Modelo vector de durações | 27 |
| 2.3 Modelo Direcional..... | 31 |
| 2.4 Outras abordagens..... | 35 |
| | |
| Parte 3 - Estimação da EPTJ..... | 37 |
| 3.1 Método <i>Bootstrap</i> | 38 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| 3.2 Métodos Paramétricos | 40 |
| 3.2.1 Modelo Nelson-Siegel | 41 |
| 3.2.2 Modelo Svensson..... | 43 |
| 3.3 Métodos <i>spline</i> | 44 |
| 3.3.1 Interpolação por <i>spline</i> cúbico..... | 44 |
| 3.3.2 <i>Spline</i> de regressão de McCulloch..... | 49 |
| 3.3.3 Modelo de Fisher-Nychka-Zervos (<i>smoothing spline</i>)..... | 52 |
| 3.3.4 Modelo de Waggoner | 53 |

Parte 4 – Risco de taxa de juro, Duração e Convexidade. Ilustração num contexto do QIS4.....55

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1 Descrição do exercício do QIS4 para o risco de taxa de juro | 55 |
| 4.2 Passivo da carteira de AT..... | 57 |
| 4.3 Activos da carteira AT | 58 |
| 4.4 Efeitos dos choques propostos pelo QIS4 na carteira AT..... | 59 |
| 4.5 Exercício de risco de taxa de juro no modelo de duração direccional | 68 |
| 4.5.1 Definição do vector de direcção | 68 |
| 4.5.2 Duração e convexidade direccional da carteira | 69 |
| 4.5.3 Estratégia de imunização no modelo de duração direccional..... | 72 |
| 4.5.4 Vector colinear da carteira (\bar{N}_0) dos exemplos 2, 3 e 4..... | 74 |
| 4.6 Modelo vector de durações (sob a hipótese do modelo de Svensson)..... | 75 |
| 4.6.1 Análise dos cenários propostos pelo QIS4 | 76 |
| 4.6.2 Qualidade da aproximação aos choques no modelo vector de durações..... | 78 |
| 4.7 Análise de cenários adicionais | 81 |
| 4.7.1 Cenários hipotéticos | 82 |

| | | |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.7.2 | Imunização de ordens superiores..... | 84 |
| 4.7.3 | Comparação dos cenários do QIS4 com as EPTJ do BCE..... | 87 |
| 4.7.3.1 | Um teste às condições de Redington | 88 |
| 4.7.3.2 | Exemplo 6 revisto..... | 91 |
| 4.7.3.3 | Imunização de terceira ordem..... | 92 |
| | Conclusão | 94 |
| | Anexo 1 – Desigualdade M-Quadrado..... | 97 |
| | Anexo 2 - Justificação do grau do polinómio do <i>spline</i> de interpolação | 98 |
| | Anexo 3 - Parâmetros dos <i>splines</i> | 100 |
| | Anexo 4 - Vectores de direcção para o cenário ascendente e descendente..... | 107 |
| | Anexo 5 - Vectores colineares unitários das estratégias 2, 3 e 4..... | 108 |
| | Anexo 6 - Valor presente dos cash flows do título OT 4,10% Abr 2037 tendo em conta os cenários do QIS4 e <i>steep</i>..... | 109 |
| | Bibliografia..... | 110 |

Lista de Tabelas

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 4.1 – Taxas de juro à vista do cenário inicial | 56 |
| Tabela 4.2 – Choques à EPTJ propostos no QIS4..... | 56 |
| Tabela 4.3 – Cash flows das responsabilidades..... | 58 |
| Tabela 4.4 – Obrigações do Tesouro Nacionais | 59 |
| Tabela 4.5 – Cash flows actualizados do passivo, duração e convexidade | 62 |
| Tabela 4.6 – Estratégia de diversificação do investimento | 63 |
| Tabela 4.7 - Cash flows da OT 5,45% Set 2013 actualizados, duração e convexidade | 64 |
| Tabela 4.8 – Variação líquida na estratégia de diversificação do investimento | 64 |
| Tabela 4.9 – Estratégia de imunização de F&W | 65 |
| Tabela 4.10 – Variação líquida na estratégia de imunização de F&W..... | 65 |
| Tabela 4.11 – Estratégia de imunização com $C(A) \geq C(L)$ | 66 |
| Tabela 4.12 – Variação líquida na estratégia de imunização com $C(A) \geq C(L)$ | 66 |
| Tabela 4.13 – Estratégia de imunização com $A_0 < L_0$ | 67 |
| Tabela 4.14 – Variação líquida na estratégia de imunização com $A_0 < L_0$ | 67 |
| Tabela 4.15 – Duração, Convexidade e aproximações no modelo direccionado do passivo | 71 |
| Tabela 4.16 – Duração, convexidade e aproximações no modelo direccionado do activo para o cenário ascendente..... | 72 |
| Tabela 4.17 – Duração, convexidade e aproximações no modelo direccionado do activo para o cenário descendente..... | 72 |
| Tabela 4.18 – Estratégia de imunização no modelo direccionado | 73 |
| Tabela 4.19 – Variação líquida na estratégia de imunização direccionado..... | 73 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 4.20 – Efeitos na variação líquida dos vectores colineares (exemplos 2, 3 e 4) | 74 |
| Tabela 4.21 – Parâmetros do MS para o cenário inicial, ascendente e descendente | 76 |
| Tabela 4.22 – Impacto no passivo do cenário inicial, ascendente e descendente no MS | 78 |
| Tabela 4.23 - Duração de ordens superiores do passivo no MS | 78 |
| Tabela 4.24 – Vector de choques para o cenário ascendente e descendente de ordem 10 | 78 |
| Tabela 4.25 – Aproximações à variação percentual instantânea no modelo vector de durações | 80 |
| Tabela 4.26 – Estratégia de imunização com $A_0 < L_0$ no MS | 82 |
| Tabela 4.27 – Variação líquida da estratégia de imunização com $A_0 < L_0$ no MS | 82 |
| Tabela 4.28 – Parâmetros dos cenários adicionais | 82 |
| Tabela 4.29 – Variação líquida dos cenários adicionais na estratégia de imunização com $A_0 < L_0$ no MS | 83 |
| Tabela 4.30 – Variações líquidas tendo em conta os choques do QIS4 e o choque <i>steep</i> | 84 |
| Tabela 4.31 – Proporções a investir em cada título | 85 |
| Tabela 4.32 – Impacto dos diversos cenários na estratégia de imunização de ordens superiores | 86 |
| Tabela 4.33 – Quantidades a investir na estratégia A e B | 89 |
| Tabela 4.34 - Impacto na carteira na estratégia A face a choques paralelos | 89 |
| Tabela 4.35 - Impacto na carteira na estratégia B face a choques paralelos | 90 |
| Tabela 4.36 – Variações na carteira face aos choques do cenário ascendente e descendente para as estratégias A e B | 90 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 4.37 – Nível de imunização da estratégia A face a 498 observações da EPTJ do BCE | 91 |
| Tabela 4.38 – Nível de imunização da estratégia B face a 498 observações da EPTJ do BCE | 91 |
| Tabela 4.39 - Nível de imunização da estratégia do exemplo 6 face a 498 observações da EPTJ do BCE..... | 92 |
| Tabela 4.40 – Proporções/quantidades a investir em cada OT na imunização de 3ª ordem..... | 93 |
| Tabela 4.41 - Nível de imunização da estratégia de terceira ordem face a 498 observações da EPTJ do BCE | 93 |

Lista de Figuras

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1.1 – Aproximação linear e quadrática do valor de uma obrigação | 16 |
| Figura 3.1 – Diversas configurações da EPTJ no modelo Nelson-Siegel | 42 |
| Figura 4.1 – <i>Natural cubic spline</i> do cenário inicial | 59 |
| Figura 4.2 – <i>Clamped cubic spline</i> e <i>spline</i> de McCulloch do cenário inicial | 60 |
| Figura 4.3 – <i>Clamped cubic spline</i> e <i>spline</i> de McCulloch do cenário ascendente..... | 61 |
| Figura 4.4 – <i>Natural cubic spline</i> e <i>spline</i> de McCulloch do cenário descendente..... | 61 |
| Figura 4.5 – EPTJ do vector colinear de direcção de norma 11,815 do exemplo 2 | 75 |
| Figura 4.6 – EPTJ do cenário inicial no MS | 77 |
| Figura 4.7 – EPTJ do cenário ascendente no MS | 77 |
| Figura 4.8 – EPTJ do cenário descendente no MS | 77 |
| Figura 4.9 – EPTJ para diversos cenários | 83 |
| Figura 4.10 – Estimação da duração do Índice S&P 500 | 87 |

Introdução

Nas últimas duas décadas tem-se assistido a uma volatilidade sem precedentes na estrutura de prazos das taxas de juro (EPTJ), apesar dos esforços das políticas monetárias na zona Euro e nos EUA para a sua estabilização. Esta crescente volatilidade torna a previsão da evolução das taxas de juro uma tarefa cada vez menos exacta o que tem consequências directas na exposição ao risco de taxa de juro de várias instituições financeiras, das quais se destacam os bancos, as companhias de seguros e as sociedades gestoras de fundo de pensões.

Deste modo, as estratégias de imunização (estratégias de protecção do valor de uma determinada carteira face a choques na EPTJ) têm vindo a merecer cada vez mais destaque no meio académico e profissional.

O risco de taxa de juro é por isso explicitamente reconhecido no Projecto de Solvência II (projecto de revisão do regime de solvência para a actividade seguradora na União Europeia), através dos estudos de impacto quantitativo (QIS).

O QIS consiste, em termos genéricos, numa série de exercícios propostos pelo Comité de Supervisores Europeus de Seguros e de Pensões Complementares de Reforma (CEIOPS) às entidades que compõem a indústria seguradora, de modo a avaliar os impactos ao nível Europeu do novo regime de Solvência.

Em termos gerais, a cada seguradora será exigido um nível de capital de acordo com o perfil de risco subscrito pela mesma.

O objectivo do presente trabalho consiste portanto, em expor a problemática do risco de taxa de juro e algumas estratégias de imunização para que seja possível analisar de uma forma crítica o exercício proposto no QIS4 relativamente à carga de capital referente ao risco de taxa de juro.

1 - Risco de taxa de juro num contexto de cash flows certos e choques paralelos

1.1 Função-preço de uma obrigação sem risco de crédito de cupão fixo.

Tendo em conta que o valor teórico de uma obrigação é igual à soma dos cash flows descontados, consideram-se as seguintes variáveis:

P_0 = valor presente de uma obrigação sem risco de crédito, que será designada por função-preço.

CF_t = cash flows recebidos no momento t .

k = número de cash flows por ano, ou seja, indica a periodicidade do cupão.

i_t = taxa de juro à vista no momento presente para um contrato com uma maturidade de t anos, ou seja, i_t representa a EPTJ.

T = maturidade da obrigação, ou seja, o número de anos que faltam para a maturidade.

Com taxas de desconto e recebimentos discretos tem-se,

$$P_0 = \sum_{t=1}^T CF_t (1+i_t)^{-t}. \quad (1.1)$$

O facto de não haver taxas à vista directamente observáveis motiva frequentemente a dedução da função-preço através de uma única taxa de desconto, ou seja, considerar que a EPTJ é dada pela *yield to maturity*.

Considerando uma obrigação de cupão anual, sem risco de crédito, de cupão fixo (c) com amortização do principal (M_T) na maturidade, vem

$$P_0 = \frac{c}{1+i} + \frac{c}{(1+i)^2} + \dots + \frac{c+M_T}{(1+i)^T} = \sum_{t=1}^T CF_t (1+i)^{-t}. \quad (1.2)$$

1.2 A taxa de rendimento efectivo

A taxa de rendimento efectivo, TRE será a taxa que transforma o valor presente da obrigação no seu valor futuro, VF . Isto é,

$$P_0 (1+r_H)^H = VF \Leftrightarrow r_H = \left(\frac{VF}{P_0} \right)^{\frac{1}{H}} - 1 \quad (1.3),$$

onde r_H representa a taxa de rendimento efectivo associado ao horizonte temporal H .

1.3 Duração de Macaulay e Duração modificada

A duração e convexidade surgem como medidas paramétricas do risco de taxa de juro. A vantagem da análise paramétrica em relação à análise de cenários consiste em não haver necessidade de reavaliação da carteira para cada variação possível da EPTJ. A desvantagem, no entanto, prende-se com o facto de se tratar de medidas sumárias da realidade assentes em pressupostos que podem ser discutíveis.

Macaulay (1938) define a duração de uma obrigação como sendo o tempo médio de recebimentos dos seus cash flows em anos. Os pesos são obtidos em relação ao valor presente de cada cash flow e o factor de actualização é dado pela *yield to maturity* anual, i . De um modo formal, a duração de Macaulay numa data de recebimento de cupão, $D(i)$ é

$$D(i) = \frac{1}{k \times P_0} \sum_{t=1}^{k \times T} t \times CF_t \left(1 + \frac{i}{k} \right)^{-t}. \quad (1.4)$$

A importância da duração advém do facto de ser uma medida de sensibilidade da função-preço, face a variações na *yield to maturity*. Essa relação é mais visível se se considerar $k=1$ e se aplicar a derivada da função-preço em ordem a i , isto é

$$\frac{dP}{di} = \frac{d}{di} \left(\sum_{t=1}^T CF_t (1+i)^{-t} \right) = -\frac{1}{1+i} \sum_{t=1}^T t \times CF_t (1+i)^{-t} \quad (1.5)$$

Dividindo (1.5) por P_0 , obtém-se

$$\frac{1}{P_0} \frac{dP}{di} = -\frac{D(i)}{1+i} = -D_m(i). \quad (1.6)$$

A expressão (1.6) é conhecida como a duração modificada e representa a aproximação de primeira ordem. Explicita também a estreita relação entre a duração de Macaulay e a duração modificada. Pressupõe, obviamente, uma EPTJ horizontal e portanto a deslocação da EPTJ será a mesma para todas as maturidades consideradas, ou seja, a deslocação da curva é assumida como sendo uma deslocação paralela e infinitesimal.

A aproximação linear da variação percentual da função-preço, face a uma variação da *yield to maturity*, é dada por

$$\frac{\Delta P}{P_0} \approx \frac{dP}{P_0} = -D_m(i) di. \quad (1.7)$$

A expressão (1.7) demonstra claramente que uma duração elevada significa que o investidor obterá um elevado benefício se houver uma descida nas taxas de juro, mas também terá uma perda elevada se o movimento for inverso. Para a variância, vem

$$\text{VAR} \left(\frac{dP}{P_0} \right) = D_m^2(i) \text{VAR}(di) \Leftrightarrow \sigma \left(\frac{dP_0}{P} \right) = D_m \sigma(di). \quad (1.8)$$

De (1.8) observa-se que o desvio padrão da variação percentual infinitesimal da função-preço é uma função linear do desvio padrão da variação infinitesimal da *yield to maturity*.

Acrescenta-se ainda que a duração de uma carteira de obrigações não é mais que a média ponderada da duração de cada obrigação, (onde o peso de cada título é dado pelo seu valor presente a dividir pelo valor presente total da carteira). É importante salientar que a *yield to maturity* deverá ser a mesma para cada termo; caso esta hipótese não se verifique, então não é correcto somar as médias ponderadas das durações.

1.4 Duração como instrumento de imunização de uma obrigação num horizonte temporal

Quando se detém uma obrigação, o conceito de duração é importante se se pretende pôr em prática medidas de imunização.

Imunização poderá ser definida como a estratégia de investimento que assegura que uma variação nas taxas de juro não afectará o valor da carteira.

Pela função-preço é claramente visível a relação inversa existente entre o valor presente de uma obrigação e a *yield to maturity*. No entanto, também se observa que o valor da obrigação tenderá para o seu valor nominal, independentemente de i .

Assim sendo, se o horizonte temporal do investidor (H) for igual à maturidade da obrigação (e tendo em conta que a obrigação gera cupões até à maturidade), então um aumento das taxas de juro significa que os cupões gerados serão reinvestidos a uma taxa superior, o que provocará um aumento da taxa de rendibilidade efectiva, r_H . Existe, portanto, um determinado horizonte temporal em que as variações nas taxas de reinvestimento dos cash flows serão anuladas pelas variações das cotações dos activos em carteira.

O investidor de uma obrigação estará imunizado em relação a um choque paralelo se o seu horizonte temporal for igual à duração.

Relembrando (1.3), com $VF = P(i)(1+i)^H$, vem

$$r_H = \left(\frac{P(i)}{P_0} \right)^{\frac{1}{H}} (1+i) - 1. \quad (1.9).$$

Minimizar r_H é equivalente a minimizar $P(i)(1+i)^H$. Assim,

$$\frac{d}{di} \left[P(i)(1+i)^H \right] \Big|_{i=i_0} = 0 \Leftrightarrow H = - \frac{(1+i_0)}{P(i_0)} \frac{dP(i)}{di} \Big|_{i=i_0} = D \quad (1.10)$$

Grandville (2001) mostra que a segunda derivada de (1.10) é sempre positiva, logo, com

$D = H$ obtém-se um mínimo para r_H e na ausência de qualquer choque $r_H = i_0$.

1.5 Convexidade

A convexidade da função-preço é dada pela taxa de variação da sua inclinação face a i , ou seja

$$C = \frac{1}{P(i)} \frac{d^2 P(i)}{di^2}. \quad (1.11)$$

O interesse da convexidade resulta de poder-se melhorar a aproximação linear que se obtém através da duração modificada. Pela expansão de Taylor de segunda ordem, vem

$$\frac{\Delta P}{P(i_0)} \approx -D_m (i - i_0) + \frac{1}{2} C (i - i_0)^2 = -D_m \Delta i + \frac{1}{2} C \Delta i^2. \quad (1.12)$$

No modelo discreto tem-se que

$$C = \frac{1}{P(i_0)(1+i)^2} \sum_{t=1}^T t(t+1) CF_t (1+i)^{-t}, \quad (1.13),$$

o que permite destacar as seguintes propriedades de demonstração imediata:

Propriedade 1: A convexidade é sempre positiva.

Propriedade 2: A convexidade depende da dispersão dos *cash flows* e da duração.

Propriedade 3: A dimensão da convexidade é dada em t^2 .

A primeira propriedade é de extrema importância e diz-nos que a correção de segunda ordem é sempre positiva.

Na figura 1.2.1 estão representadas duas obrigações, *A* e *B*, apresentando *B* uma maior convexidade

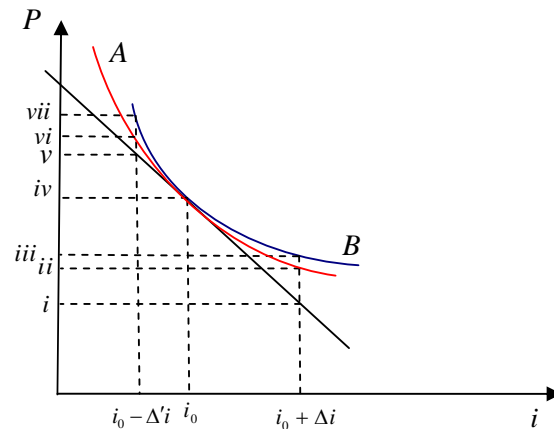


Figura 1.1 – Aproximação linear e quadrática do valor de uma obrigação

- No ponto (i_0, iv) tem-se a situação inicial, em que o valor da obrigação *A* iguala o valor da obrigação *B*.
- Mediante um choque paralelo da taxa de juro de magnitude Δi , o valor da obrigação *A* decresce para *ii*, enquanto *B* decresce para *iii*, com $iii - ii > 0$, uma vez que *B* é mais convexo que *A*.
- Mediante um choque paralelo da taxa de juro de magnitude $-\Delta i$, o valor da obrigação *A* aumenta para *vi*, enquanto *B* aumenta para *vii*, com $vii - vi > 0$, uma vez que *B* tem maior convexidade.
- Note-se que, $ii - i$ e $iii - i$ representam o desvio de primeira ordem para as obrigações *A* e *B*, respectivamente, face a um choque paralelo de magnitude Δi , e que ambas as diferenças são maiores que zero. Isto significa que a aproximação de primeira ordem (uma vez que a segunda derivada da função-preço é sempre positiva) sobrestima o decréscimo de valor de ambas as obrigações.

- Note-se também que, $vi - v$ e $vii - v$ representam o erro de primeira ordem para as obrigações A e B , respectivamente, face a um choque paralelo de magnitude $-\Delta'i$, e que ambas as diferenças são maiores que zero. Isto significa que a aproximação de primeira ordem (uma vez que a segunda derivada da obrigação preço é sempre positiva) subestima o aumento de valor de ambas as obrigações num contexto de choques paralelos.

O facto de a convexidade depender da dispersão dos pagamentos e da duração de Macaulay advém do facto de que

$$C = \frac{1}{(1+i)^2} \left[\sum_{t=1}^T w_t (t - D(i))^2 + D(D+1) \right]. \quad (1.14)$$

Assim, para uma determinada duração, uma obrigação ou uma carteira de obrigações será tanta mais convexa quanto maior for a dispersão dos seus cash flows.

A principal característica da convexidade é que **quanto mais convexa for uma determinada obrigação, menor será a perda de valor, face a um aumento paralelo da taxa de juro, e maior será o ganho mediante uma descida da mesma.** Consequentemente, a aproximação de primeira ordem (dado que a convexidade da recta é zero) gera sempre um cenário mais “conservador” do que o obtido através de um *stress-test*, sendo o erro de primeira ordem tanto maior quanto mais convexa for a obrigação.

1.6 Imunização no contexto de activos e passivos – Condições de Redington

A imunização de uma carteira contendo activos e passivos é de particular relevância para as seguradoras do ramo vida, uma vez que através de modelos actuariais projectam

os cash flows das suas responsabilidades futuras (normalmente de longo prazo e portanto mais expostas ao risco de taxa de juro) e investem grande parte das suas provisões técnicas no mercado obrigacionista.

Sendo L_t o pagamento futuro (em t) das responsabilidades de uma determinada empresa, o valor presente do passivo, VP_L , é dado por

$$VP_L = \sum_{t=1}^T L_t (1+i)^{-t}. \quad (1.15)$$

Do mesmo modo, se estabelece o valor presente dos recebimentos futuros (no momento t), A_t :

$$VP_A = \sum_{t=1}^T A_t (1+i)^{-t} \quad (1.16)$$

Logo, valor do balanço, Π , é

$$\Pi = VP_A - VP_L \quad (1.17)$$

Para imunizar o balanço, face a choques paralelos da EPTJ, Redington (1952) estabeleceu as seguintes condições:

- O valor presente do activo deverá igualar o valor presente do passivo, isto é $VP_A = VP_L$.
- O activo e passivo deverão ter a mesma duração, isto é $D_A = D_L$.
- A convexidade do activo deverá ser superior à convexidade do passivo, ou seja, $C_A > C_L$.

Estas condições são o resultado directo do objectivo de se evitar que variações em i tenham um efeito negativo no valor do balanço. Deste modo, vem

$$\frac{d\Pi}{di} = \frac{d}{di} \left[\sum_{t=1}^T (VP_A \times t - VP_L \times t) (1+i)^{-t} \right] \quad (1.18)$$

Multiplicando e dividindo (1.18) por VP_A , e tendo em conta que $VP_A = VP_L$, tem-se

$$\frac{d\Pi}{di} = \frac{VP_A}{1+i} [D_L - D_A]. \quad (1.19)$$

Chega-se assim à condição de primeira ordem: $VP_A = VP_L$ e $D_A = D_L$.

A condição de segunda ordem, $C_A > C_L$, justifica-se pela necessidade de se manter o balanço positivo face a variações de i , o que acontecerá se B for uma função convexa. Sendo a convexidade da soma igual à soma das convexidades tal acontecerá se $d^2VP_A/di > d^2VP_L/di$, uma vez que ambos os valores presentes são iguais. Tendo em conta que $D_A = D_L$, é necessário ter uma carteira de activos cuja dispersão de cash flows do activos seja superior à dispersão dos cash flows do passivo, para que seja garantida a condição de segunda ordem.

A estratégia Barbell-Bullet consiste em aplicar de uma forma activa as condições de Redington. Esta estratégia consiste, na sua forma mais simples, em tomar uma posição longa numa carteira (Barbell) constituída por duas obrigações, uma de maturidade reduzida e outra de maturidade elevada, e uma posição curta numa obrigação (Bullet) de duração média, de forma a igualar o valor presente e a duração de ambas. É natural que a carteira Barbell exiba uma maior convexidade, devido à maior dispersão dos seus cash flows. Assim, qualquer que seja a deslocação paralela da EPTJ horizontal, o investidor obterá sempre um ganho, pois estarão cumpridas as condições de Redington.

1.7 Duração de Fisher e Weil

Fisher e Weil (1971) generalizam a EPTJ horizontal na duração de Macaulay para uma estrutura inicial que poderá assumir qualquer forma, substituindo a *yield to maturity* pelas taxas de juro à vista. Embora não haja qualquer restrição sobre a configuração da EPTJ inicial, a restrição de choques paralelos mantém-se. Em condições normais de

mercado a taxa de juro à vista para obrigações sem risco de crédito aumenta com a maturidade, uma vez que se exige uma maior rendibilidade para períodos mais longos (devido, principalmente, à preferência de liquidez e à aversão ao risco de taxa de juro).

De forma a simplificar os cálculos, Fisher e Weil derivam a duração em tempo contínuo.

A função-preço $P(\vec{i})$ é definida por,

$$P(\vec{i}) = \int_0^T c(t) e^{-i(0,t)t} dt, \quad (1.20)$$

onde $c(t)$ é o cash flow gerado continuamente em t e $i(0,t)$ é uma função contínua das taxas de juro à vista, com

$$i(0,t) \times t = \int_0^t i(z) dz, \quad (1.21)$$

sendo $i(z)$ é a taxa de juro instantânea contratada no presente, a iniciar em z , por um período (maturidade) infinitesimal.

Mediante um choque paralelo de magnitude α a “nova” função-preço é definida por

$$P(\vec{i} + \alpha) = \int_0^T c(t) e^{-[i(0,t) + \alpha]t} dt \quad (1.22)$$

Isto é, dada a estrutura inicial, a função-preço continua a ser função de uma só variável, α . Deste modo, a duração de Fisher e Weil é

$$D(\vec{i} + \alpha) = -\frac{1}{P(\vec{i} + \alpha)} \frac{dP(\vec{i} + \alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{P(\vec{i} + \alpha)} \int_0^T t \times c(t) e^{-[i(0,t) + \alpha]t} dt \quad (1.23)$$

Com $\alpha = 0$, tem-se que a duração no momento zero é

$$D = -\frac{1}{P(\vec{i})} \frac{dP(\vec{i})}{d\alpha} = \frac{1}{P(\vec{i})} \int_0^T t \times c(t) e^{-[i(0,t)]t} dt. \quad (1.24)$$

Note-se que, ao contrário do modelo discreto, no modelo contínuo não se tem a distinção entre duração de Macaulay e a duração modificada, pois neste caso o tempo

médios de recebimentos é igual à derivada da função-preço em ordem a α e a duração de uma obrigação de cupão zero é igual a T .

Para a convexidade, vem

$$C(\vec{i} + \alpha) = \frac{1}{P(\vec{i} + \alpha)} \frac{d^2 P(\vec{i} + \alpha)}{d\alpha^2} = \frac{1}{P(\vec{i} + \alpha)} \int_0^T t^2 \times c(t) e^{-[i(0,t) + \alpha]t} dt \quad (1.25)$$

Note-se que a convexidade para uma obrigação de cupão zero é T^2 e não $T^2 + T$, donde resulta que, nesse caso, a convexidade é igual ao quadrado da duração.

As propriedades da convexidade e imunização do modelo discreto de Macaulay podem ser aplicadas ao modelo de Fisher e Weil, embora seja necessário fazer as respectivas adaptações e ter-se alguma cautela na interpretação directa dos resultados.

1.8 Estimativas da duração e convexidade

Independentemente de se considerar capitalizações contínuas ou discretas, Reitano (1992) propõe que a duração e convexidade no modelo de Fisher e Weil sejam calculadas tendo em conta a derivada central, dado que as funções não são perfeitamente simétricas. Recordando que a derivada central da função $f(x)$ é $f'_c(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x-h)) / 2h$, vem directamente que

$$D(i) = - \left(\frac{P(\vec{i} + \alpha) - P(\vec{i} - \alpha)}{2\alpha P(\vec{i})} \right) \quad (1.26)$$

O autor considera que cerca de 1 a 5 pontos base para α é suficiente. Tendo em conta a segunda derivada central obtém-se a estimativa para a convexidade:

$$C(\vec{i}) = \frac{P(\vec{i} + \alpha^*) + P(\vec{i} - \alpha^*) - 2P(\vec{i})}{(\alpha^*)^2 P(\vec{i})}, \quad (1.27)$$

em que $\alpha^* = 2\alpha$.

1.9 Limitações dos modelos de duração de Macaulay e Fisher e Weil

Para além da duração de Macaulay assumir uma EPTJ horizontal (definida pela *yield to maturity*), o que por si só limita os choques a deslocações paralelas e contraria a teoria económica, as condições de Redington, isto é, as propriedades da convexidade, são claramente inconsistentes com o equilíbrio de mercado.

No que diz respeito ao modelo de Fisher e Weil Reitano (1992) embora não haja limitações quanto à forma da EPTJ inicial, a hipótese de que a curva se desloca apenas de forma paralela mantém-se. Fabozzi (1999) exemplifica numericamente que para choques não paralelos o resultado da estratégia Barbell-Bullet para um dado horizonte temporal pode produzir efeitos contrários aos esperados. Ou seja, a carteira Bullet poderá, em certos cenários, ter uma performance superior à carteira Barbell.

Reitano mostra ainda que para determinadas deslocações a duração de Fisher e Weil, poderá nem sequer captar o sentido certo da variação de um determinado balanço.

2 - Risco de taxa de juro num contexto de choques não paralelos

No ponto anterior analisou-se a duração e a convexidade como medidas de risco de taxa de juro para obrigações de cash flows certos, partindo do pressuposto que a EPTJ apenas se deslocava de forma paralela. No entanto, este tipo de movimentação raramente é observado na realidade, veja-se Chambers (1996). O facto de se ignorar variações não paralelas poderá aumentar consideravelmente o risco do processo estocástico, isto é, o risco da má especificação do modelo face ao comportamento aleatório das taxas de juro.

Neste ponto, apresentam-se sucintamente apenas algumas medidas de risco de taxa de juro em que a restrição de choques paralelos é relaxada, de forma a haver uma maior consistência com a realidade empírica.

O primeiro modelo, M-Quadrado, tem como objectivo de imunizar a carteira para um determinado horizonte temporal, e define um limite inferior para a diferença entre o valor da carteira em H , pressupondo primeiro que as taxas futuras se mantêm inalteradas (valor alvo) e depois que se observa um choque arbitrário de magnitude $\Delta f(t)$, $0 \leq t \leq H$. O modelo permite ainda obter uma nova perspectiva sobre as propriedades da convexidade analisadas anteriormente.

Apresenta-se ainda o modelo de vector de durações. Derivando durações de ordens superiores este modelos permitem captar os efeitos na função-preço resultantes de variações na altura, inclinação, curvatura, taxa de variação da curvatura e outros parâmetros de ordem superior da função representativa da EPTJ.

Por fim, apresenta-se o modelo de duração e convexidade direcciona de Reitano (1992). Neste modelo, uma vez definida a norma do vector direcciona, isto é, a magnitude do choque, a sensibilidade da função-preço depende do sentido/direcção em

que as taxas se movimentam para as diversas maturidades. Aplicando directamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade quadrática definem-se os limites superior e inferior para os parâmetros de risco duração e convexidade direccionais, demonstrando que os extremos podem apresentar sinais contrários, o que tem algumas implicações.

Ao redefinirem as propriedades da convexidade estes modelos ajudam a explicar a situação de desequilíbrio encontrada nas condições de Redington e os riscos da estratégia *Barbell-Bullet*.

2.1 M-Quadrado

O modelo é construído num contexto de capitalizações contínuas das taxas futuras de cash flows discretos. Tendo em conta que as variáveis mantêm o seu significado anterior, define-se sucessivamente

$$P_0 = \sum_{t=1}^T CF_t e^{-\int_0^t f(z) dz} ; w_t = \frac{CF_t e^{-\int_0^t f(z) dz}}{P_0} \quad e \quad D = \sum_{t=1}^T t \times w_t \quad (2.1)$$

$$P_H = P_0 \times e^{\int_0^H f(z) dz} = \sum_{t=1}^T CF_t \times e^{\int_0^H f(z) dz} ; P_H^\Delta = P_0 \times e^{\int_0^H [f(z) + \Delta f(z)] dz} = \sum_{t=1}^T CF_t \times e^{\int_0^H [f(z) + \Delta f(z)] dz} \quad (2.2)$$

Fong e Vasicek (1983) apresentam a medida de risco denominada M-Quadrado, M^2 . O modelo define um limite inferior para a diferença; $\Delta P_H = P_H^\Delta - P_H$, e é específico para um dado horizonte temporal.

O modelo permite ainda obter uma nova perspectiva sobre as propriedades da convexidade analisadas anteriormente.

A expressão do M^2 é dada por

$$M^2 = \sum_{t=1}^T (t-H)^2 \times w_t, \quad (2.3)$$

Com $H = 0$, M^2 reduz-se à convexidade. Tendo em conta (2.2) define-se a seguinte desigualdade (veja-se o anexo 1),

$$\frac{\Delta P_H}{P_H} \geq -(D-H) \Delta f(H) - \frac{1}{2} K_4 \times M^2 \quad (2.4)$$

com $K_4 \geq \frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t}$, para todo o $t \geq 0$. Uma vez que se pretende minimizar a volatilidade

da carteira, impõe-se a restrição $D=H$ e tem-se como objectivo minimizar o M^2 da carteira, o que faz com que o modelo seja baseado em duas medidas de risco.

A constante K_4 está fora do controlo do investidor e apenas no caso trivial, isto é, com uma obrigação de cupão zero com a maturidade igual ao horizonte temporal é que é possível uma imunização perfeita.

Desenvolvendo o quadrado de (2.3) facilmente se verifica a relação linear entre o M-Quadrado e convexidade,

$$M^2 = C - 2DH + H^2 \quad (2.5)$$

Fixando-se a duração, M-Quadrado é uma função crescente da convexidade. No ponto anterior mostrou-se que, quanto maior a convexidade, maior a rendibilidade da carteira face a choques paralelos; no entanto, a estratégia de imunização consiste em minimizar o M-Quadrado da carteira. Assim, a expressão (2.5) exprime o conhecido paradoxo convexidade/M-Quadrado.

Lacey e Nawalkha (1993), de forma a resolver este paradoxo, propõem uma expansão de segunda ordem para a rendibilidade realizada da carteira, $R(H)$.

Com $R(H) = \frac{P_H^\Delta - P_0}{P_0}$, tem-se

$$R(H) = \frac{1}{P_0} \left[e^{\int_0^H f(z) dz} \left[\sum_{t=1}^T CF_t \times e^{-\int_0^t f(z) dz} e^{\int_0^H \Delta f(z) d(z)} \right] - P_0 \right]. \quad (2.6)$$

Considerando a expansão de segunda ordem para $e^{\int_0^H \Delta f(z) d(z)}$, à volta do ponto $t = H$,

vem

$$e^{\int_0^H \Delta f(z) d(z)} = 1 - (t - H) \Delta f(H) - \frac{1}{2} (t - H)^2 \left[\frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t} \right]_{t=H} - (\Delta f(H))^2 + \varepsilon(t), \quad (2.7)$$

sendo $\varepsilon(t)$ o erro devido aos termos de ordem superior da expansão. Substituindo (2.7)

em (2.6), obtém-se, após alguma manipulação algébrica

$$R(H) = R_F(H) + \gamma_1 [D - H] + \gamma_2 M^2 + \varepsilon(t) \quad (2.8)$$

onde $R_F(H)$ é a rendibilidade sem risco de uma obrigação de cupão zero (sem risco de crédito) com maturidade H , isto é,

$$R_F(H) = e^{\int_0^H f(z) dz} - 1. \quad (2.9)$$

Sendo o coeficiente da duração e o coeficiente do M-Quadrado dados por

$$\gamma_1 = -\Delta f(H) (1 + R_F(H)) \quad (2.10)$$

e

$$\gamma_2 = -\frac{1}{2} (1 + R_F(H)) \left[\frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t} \right]_{t=H} - (\Delta f(H))^2 \quad (2.11)$$

respectivamente.

O coeficiente do M-Quadrado pode ser dividido em duas componentes, isto é,

$$\gamma_2 = EC - ER \quad (2.12)$$

em que

$EC =$ Efeito Convexidade:

$$\frac{1}{2} (1 + R_F(H)) (\Delta f(H))^2 \quad (2.13)$$

e ER = Efeito Risco:

$$\frac{1}{2}(1+R_f(H))\frac{\partial\Delta f(t)}{\partial t}\Big|_{t=H}. \quad (2.14)$$

O efeito convexidade é positivo, independentemente do tipo de choque; logo, quanto maior o M-Quadrado (que é o mesmo que dizer, quanto maior a convexidade), maior a rendibilidade da carteira. Assim, o efeito convexidade está em conformidade com a visão tradicional da mesma.

O efeito risco poderá ser positivo, negativo ou zero, dependendo do tipo de movimentação. Note-se que se o choque for paralelo ao longo da EPTJ, então,

$\frac{\partial\Delta f(t)}{\partial t}=0$ e, portanto, apenas o efeito convexidade terá influência em γ_2 e,

consequentemente, na rendibilidade da carteira. Um choque positivo (negativo) na inclinação da EPTJ diminui (aumenta) o valor do coeficiente γ_2 ; consequentemente, quanto maior (menor) o M-Quadrado/convexidade, menor (maior) a rendibilidade da carteira.

É importante ter-se em conta que o parâmetro γ_2 compara apenas $(\Delta f(H))^2$ e

$\frac{\partial\Delta f(t)}{\partial t}\Big|_{t=H}$, ignorando os efeitos de ordens superiores.

Não obstante, o modelo define claramente que, quando os choques sobre a inclinação das taxas futuras são bem mais significativos que os choques sobre a sua altura, uma convexidade elevada poderá não ser uma propriedade desejável.

2.2 Modelo vector de durações

Embora o M-Quadrado represente uma melhoria significativa em relação à duração de Fisher e Weil, a sua estratégia limita-se a construir uma carteira com cash flows centrados à volta de um determinado horizonte temporal. Chambers, Carlton e

McEnally (1988) derivam o modelo vector de durações, com o intuito de captar os efeitos na função-preço resultantes de variações na altura, inclinação, curvatura, taxa de variação da curvatura e outros parâmetros de ordem superior da função representativa da EPTJ..

Neste modelo, a variação percentual instantânea da carteira, após um choque instantâneo nas taxas futuras, é dada por

$$\begin{aligned}
R(0) &= \frac{\Delta P_0}{P_0} = -D(1) \times [\Delta f(0)] \\
&- D(2) \times \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t} - (\Delta f(0))^2 \right) \right]_{t=0} \\
&- D(3) \times \left[\frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^2 \Delta f(t)}{\partial t^2} - 3\Delta f(0) \frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t} + (\Delta f(0))^3 \right) \right]_{t=0}, \quad (2.15) \\
&\vdots \\
&- D(M) \left[\frac{1}{M!} \left(\frac{\partial^{M-1} \Delta f(t)}{\partial t^{M-1}} + \dots + (\Delta f(0))^M \right) \right]_{t=0} + \varepsilon(t)
\end{aligned}$$

em que

$$D(m) = \sum_{t=1}^T w_t \times t^m, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.16)$$

representa as durações de ordem 1 até à ordem M , sendo que w_t mantém o seu significado anterior.

A expressão (2.15) pode ser vista como um produto interno de 2 vectores, o vector de durações e o vector de choques; logo, a sua forma simplificada é dada por

$$R(0) = \frac{\Delta P_0}{P_0} = D(1)Y_1 + D(2)Y_2 + D(3)Y_3 + \dots + D(M)Y_M + \varepsilon(t) \quad (2.17)$$

O vector $D(m)$ depende da maturidade da carteira, enquanto o vector Y_m depende da natureza dos choques na estrutura das taxas futuras instantâneas. Note-se que Y_1 representa o choque paralelo e $D(1)$ a duração de Fisher e Weil, Y_2 o choque na

inclinação menos o choque paralelo ao quadrado e $D(2)$ não é mais que a convexidade; logo, com $M=2$ e $H=0$, o modelo é equivalente ao modelo M-Quadrado.

À medida que se acrescenta termos no lado direito de (2.17), isto é, à medida que se aumenta a ordem da expansão, vai-se captar os efeitos de ordens superiores e consequentemente diminui-se o valor do termo residual.

O modelo deduz-se facilmente tendo em conta (2.6). Considerando novamente a

expansão de Taylor de $e^{\int_0^H \Delta f(z) d(z)}$ em torno de H , neste caso, até à ordem M , vem

$$\begin{aligned}
e^{\int_0^H \Delta f(z) d(z)} &= 1 - [t - H] \times [\Delta f(H)] \\
&- \frac{1}{2} [t - H]^2 \times \left[\left(-(\Delta f(t))^2 + \frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t} \right) \right]_{t=H} \\
&- \frac{1}{3!} [t - H]^3 \times \left[\left(+(\Delta f(t))^3 - 3\Delta f(t) \frac{\partial \Delta f(t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Delta f(t)}{\partial t^2} \right) \right]_{t=H} \\
&\vdots \\
&- \frac{1}{M!} [t - H]^M \times \left[\left(\frac{\partial^{M-1} \Delta f(t)}{\partial t^{M-1}} + \dots + (\Delta f(t))^M \right) \right]_{t=H} + \varepsilon(t)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Com $H=0$ e substituindo (2.18) em (2.6) obtém-se quase de imediato (2.15).

A imunização de uma obrigação neste modelo para um determinado horizonte temporal, H , implica as seguintes restrições,

$$D(1) = \sum_{t=1}^T w_t \times t = H, \quad D(2) = \sum_{t=1}^T w_t \times t^2 = H^2, \dots, \quad D(M) = \sum_{t=1}^T w_t \times t^M = H^M \tag{2.19}$$

O vector de durações de uma carteira é obtido pela média das proporções investidas em

cada obrigação dado por p_j , em que $j=1, 2, \dots, n$, e $\sum_{j=1}^n p_j = 1$, isto é

$$D(m) = \sum_{j=1}^n D(m) p_j \tag{2.20}$$

Para se imunizar uma carteira de obrigação num dado horizonte temporal tem-se

$$D(1) = \sum_{j=1}^n p_j D_j(1) = H; \dots; D(M) = \sum_{j=1}^n p_j D_j(M) = H^M; \sum_{j=1}^n p_j = 1 \quad (2.21)$$

Que só tem solução única se $n = M + 1$. Caso $n > M + 1$, pode-se obter uma solução

única definindo o seguinte problema de minimização, $Min \left[\sum_{j=1}^n p_j^2 \right]$, sujeito às restrições

(2.21). Uma vez que as restrições são todas de igualdade, o problema é facilmente resolvido através do método dos multiplicadores de Lagrange. Recorde-se que

minimizar $\sum_{j=1}^n p_j^2$ significa diversificar o investimento tanto quanto possível nas n

obrigações que fazem parte da carteira.

A solução do problema na forma matricial é dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & D_1(1) & D_1(2) & \dots & D_1(M) & 1 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & D_2(1) & D_2(2) & \dots & D_2(M) & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 2 & D_j(1) & D_j(2) & \dots & D_j(M) & 1 \\ D_1(1) & D_2(1) & \dots & D_j(1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ D_1(2) & D_2(2) & \dots & D_j(2) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1(M) & D_2(M) & \vdots & D_j(M) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ H \\ H^2 \\ \vdots \\ H^M \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_j \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_M \\ \lambda_{M+1} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Chambers *et. al* (1997) concluem que para $M = 5$, a estratégia de imunização no modelo vector de durações elimina em cerca de 95% o risco do processo estocástico, pelo que o modelo é virtualmente independente do processo estocástico que rege a EPTJ.

A imunização num contexto de activos e passivos do ponto anterior poderá ser redefinida da seguinte forma,

$$VP_A \times D_A(1) = VP_L \times D_L(1), \quad VP_A \times D_A(2) = VP_L \times D_L(2) \quad (2.23)$$

Chambers *et. al* (1988) concluem que as estimativas para o cálculo de $D(m)$ utilizando as *yield to maturities* das respectivas obrigações pouco difere dos cálculos em que se

inclui toda a estrutura das taxas futuras. No entanto, diferenças significativas são obtidas quando se arredonda o tempo passado entre os pagamentos de cupões para a data do cupão mais próxima.

2.3 Modelo Direccional

Reitano (1992), propõe um modelo para a duração e convexidade onde as taxas para os diferentes prazos se deslocam na direcção de um determinado vector, perante um choque de certa magnitude. Uma vez que os elementos do vector de direcção podem conter qualquer número real e não existe qualquer tipo de interdependência entre os mesmos, o modelo não depende da formulação matemática subjacente à EPTJ.

O vector genérico que representa as m taxas de juro à vista para as diversas maturidades é dado por $\vec{i} = (i_1, i_2, \dots, i_m)$. Concretizando o vector para o momento zero tem-se $\vec{i}_0 = (i_{01}, i_{02}, \dots, i_{0m})$.

Seja $\vec{N} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ o vector direccional ($m \times 1$) que define a direcção segundo a qual se deslocam taxas de juro à vista, então um choque de magnitude Δi implica a seguinte deslocação da curva inicial:

$$\vec{i}_0 + \Delta i \vec{N} = (i_{01} + \Delta i n_1, i_{02} + \Delta i n_2, \dots, i_{0m} + \Delta i n_m) \quad (2.24)$$

Considere-se

$$P(\vec{i}_0 + \Delta i \vec{N}), \quad (2.25)$$

como a função-preço no modelo direccional, imediatamente após um choque de magnitude Δi na direcção \vec{N} .

Admitindo-se a existência da primeira derivada direccional da função-preço em ordem a Δi , tem-se

$$\frac{dP(\vec{i} + \Delta i \vec{N})}{d\Delta i} = \sum_{t=1}^m n_j \frac{\partial P(\vec{i} + \Delta i \vec{N})}{\partial i_t}. \quad (2.26)$$

Facilmente se mostra (2.26) se se considerar o diferencial total de $y = f(x_1, \dots, x_m)$, dado por

$$dy = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_j} dx_j \quad (2.27)$$

Suponha-se que cada diferencial dx_j é escrito da seguinte forma

$$dx_j = n_j d\lambda, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.28)$$

onde $d\lambda$ é um incremento infinitesimal. Substituindo (2.28) em (2.27) obtém-se

$$\frac{dy}{d\lambda} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_j} \times n_j = \nabla \cdot \vec{N}, \quad (2.29)$$

onde ∇ designa o gradiente do vector f no ponto (x_1, \dots, x_m) . A expressão (2.29) define a derivada direccional.

Admitindo-se a existência de segunda derivada de (2.25), vem

$$\frac{d^2 P(\vec{i} + \Delta i \vec{N})}{d\Delta i^2} = \sum_{t=1}^m \sum_{k=1}^m n_t n_k \frac{\partial^2 P(\vec{i} + \Delta i \vec{N})}{\partial i_t \partial i_k} \quad (2.30)$$

Avaliando as derivadas no momento zero, com $\Delta i = 0$ e tendo em conta a expansão de Taylor de segunda ordem obtém-se, sucessivamente,

$$\frac{P(\vec{i}_0 + \Delta i \vec{N})}{P(\vec{i}_0)} = 1 - D_{\vec{N}}(\vec{i}_0) \Delta i + \frac{1}{2} C_{\vec{N}}(\vec{i}_0) \Delta i^2 \quad (2.31),$$

com

$$D_{\vec{N}}(\vec{i}_0) = -\frac{1}{P(\vec{i}_0)} \sum_{t=1}^m n_j \frac{\partial P(\vec{i})}{\partial i_t} \Bigg|_{i_t = i_{0t}}, \quad (2.32)$$

e

$$C_{\vec{N}}(\vec{i}_0) = \frac{1}{P(\vec{i}_0)} \sum_{t=1}^m \sum_{k=1}^m n_t n_k \frac{\partial^2 P(\vec{i})}{\partial i_t \partial i_k} \Bigg|_{i_t = i_{0t}, i_k = i_{0k}}, \quad (2.33)$$

sendo $D_{\vec{N}}(\vec{i}_0)$ e $C_{\vec{N}}(\vec{i}_0)$ a duração direccional e a convexidade direccional, respectivamente.

Escrevendo as expressões genéricas de (2.32) e (2.33) na forma matricial, vem

$$D_{\vec{N}}(\vec{i}) = \vec{N}^T \vec{D}(\vec{i}) \quad (2.34)$$

$$C_{\vec{N}}(\vec{i}) = \vec{N}^T C(\vec{i}) \vec{N}, \quad (2.35)$$

onde $\vec{D}(\vec{i})$ é o vector ($m \times 1$) de duração total e $C(\vec{i})$ a matriz simétrica ($m \times m$) de convexidade total.

Se $\vec{N} = (1, 1, \dots, 1)$ está-se perante uma deslocação paralela das taxas de juro à vista e, portanto, o modelo de Fisher e Weil pode ser visto como um caso particular do modelo direccional. Neste caso tem-se que

$$\sum_{t=1}^m D_t(\vec{i}) = D(\vec{i}), \quad (2.36)$$

onde $D_t(\vec{i})$, $t = 1, 2, \dots, m$, é o elemento genérico do vector de duração total.

Com o objectivo de comparar os efeitos na função-preço de diferentes vectores de direcção, Reitano propõe que a norma de \vec{N} seja fixada em \sqrt{m} , de modo a igualar a dimensão de um choque paralelo, isto é, a norma do vector $\vec{N} = (1, \dots, 1)$.

A função-preço ainda pode ser expressa como função de $D_{\vec{N}}(\vec{i}_0 + t\vec{N})$, se se considerar

$f(t) = \ln(P(\vec{i}_0 + t\vec{N}))$. Logo, tem-se que $\frac{df(t)}{dt} = -D_{\vec{N}}(\vec{i}_0 + t\vec{N})$. Integrando e aplicando

expoente obtém-se

$$\frac{P(\vec{i}_0 + \Delta i \vec{N})}{P(\vec{i}_0)} = e^{-\int_0^{\Delta i} D_{\vec{N}}(\vec{i}_0 + t\vec{N}) dt} \quad (2.37)$$

Esta igualdade motiva a seguinte aproximação de segunda ordem do logaritmo natural da função-preço:

$$\frac{P(\vec{i}_0 + \Delta i \vec{N})}{P(\vec{i}_0)} \approx \exp \left\{ -D_{\vec{N}}(\vec{i}_0) \Delta i + \frac{1}{2} [C_{\vec{N}}(\vec{i}_0) - D_{\vec{N}}^2(\vec{i}_0)] (\Delta i)^2 \right\} \quad (2.38)$$

É claro que se $C_{\vec{N}}(\vec{i}_0) > D_{\vec{N}}^2(\vec{i}_0)$ o ajustamento de segunda ordem é positivo; caso contrário, será negativo. Se o vector de direcção representar um choque paralelo; o ajustamento de segunda ordem será sempre positivo.

O valor da duração direccional depende do vector direccional. Uma das vantagens do modelo é que uma vez fixada a norma de \vec{N} , é possível definir os limites superior e inferior de $D_{\vec{N}}(\vec{i}_0)$. Aplicando directamente o lema de Cauchy-Schwarz, vem

$$-\|\vec{D}(\vec{i}_0)\| \|\vec{N}\| \leq D_{\vec{N}}(\vec{i}_0) \leq \|\vec{D}(\vec{i}_0)\| \|\vec{N}\| \quad (2.39)$$

Os limites serão atingidos se o vector de duração total for paralelo ao vector de direcção.

Logo, o limite superior (inferior) de (2.39) é atingido para todos os múltiplos positivos (negativos) do vector unitário \vec{N}_0 , em que

$$\vec{N}_0 = \frac{\vec{D}(\vec{i}_0)}{\|\vec{D}(\vec{i}_0)\|} \quad (2.40)$$

Assim, é importante analisar se o vector de direcção da expressão anterior, e todos os seus múltiplos, são minimamente consistentes com a realidade.

Se todos os elementos do vector de duração total forem iguais, os choques paralelos serão os que têm maior impacto na função preço, pois $\vec{N} = (1,1,\dots,1)$, será paralelo a $\vec{D}(\vec{i}_0)$.

Tal como para a duração direccional, a convexidade direccional depende da direcção em que as taxas se movimentam para as diversas maturidades. Aplicando directamente a desigualdade quadrática obtém-se os limites superior e inferior de $C_{\vec{N}}(\vec{i}_0)$, ou seja,

$$\lambda_1 \|\vec{N}\|^2 \leq C_{\vec{N}}(\vec{i}_0) \leq \lambda_m \|\vec{N}\|^2, \quad (2.41)$$

com λ_1 e λ_m a menor e a maior raiz característica respectivamente. Os limites serão atingidos para todos os múltiplos dos vectores característicos associados, \vec{N}_1 e \vec{N}_m .

A desigualdade quadrática demonstra explicitamente que apenas nos casos em que todas as raízes características da matriz $C(\vec{i}_0)$ são positivas (negativas) é que para qualquer vector \vec{N} , $C_{\vec{N}}(\vec{i}_0)$ é positivo (negativo), ou seja, quando $C(\vec{i}_0)$ for definida positiva (negativa). Segundo o autor, $C_{\vec{N}}(\vec{i})$ admite normalmente ambos os sinais, pois este admite valores não nulos fora da diagonal principal de $C(\vec{i})$.

Logo, o facto da convexidade direccional ser positiva, quando $\vec{N} = (1,1,\dots,1)$, não implica que o seja para outro tipo de vectores de direcção.

2.4 Outras abordagens

Alternativamente ao modelo direccional, Reitano propõe um modelo que reconhece de uma forma mais explícita a natureza multi-variada da função-preço: o chamado Modelo Parcial. Tal como o modelo do ponto anterior, o Modelo Parcial permite a modelização face a qualquer tipo de deslocamento da EPTJ.

O conceito de duração parcial e convexidade parcial é equivalente à duração *key rate* (taxas chave) e à convexidade *key rate* apresentado por Ho (1992). A designação advém do facto do autor propor que as maturidades dos choques da EPTJ sejam agrupadas por maturidades chave, de forma a reduzir o número de variáveis do modelo, mas que ao mesmo tempo, capte com fiabilidade as movimentações de toda a EPTJ. As maturidades chave propostas são; 0,25 – 0,5 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 10 – 20 e 30 anos em que os prazos intermédios são obtidos por interpolação linear. O autor não especifica qualquer

razão para a escolha das taxas chave e admite que a interpolação linear se deve a razões de simplificação.

Uma vez que um choque na taxa de juro à vista para uma determinada maturidade no modelo parcial afecta apenas os cash flows à volta da mesma, Johnson e Meyer (1989) apresentam uma metodologia de duração parcial baseada nas taxas futuras. Nesta, cada taxa futura afecta o valor presente de todos os cash flows durante e após essa

maturidade; dado que $i(0, t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(z) dz$.

Dado que uma das principais limitações dos modelos apresentados ao longo deste ponto é que estes não modelam explicitamente a informação histórica dos choques na EPTJ.

Assim, para ultrapassar esta limitação, o modelo de duração de componentes principais considera para a duração e convexidade, as variâncias e co-variâncias na altura, inclinação e curvatura dos choques na EPTJ. No entanto, dada a natureza estática do modelo, pressupõe a existência de estacionaridade na estrutura das co-variâncias. Logo, se a hipótese não se verificar, o modelo é ineficaz para explicar a volatilidade futura dos choques afectando assim a sua capacidade de imunização, veja-se Bliss (1997).

Outra abordagem possível para os modelos de duração é modelizar uma estrutura dinâmica para a taxa de juro instantânea (*instantaneous short rate*). A função-preço passa a ser função desta estrutura da qual se obtém os parâmetros de risco, duração e convexidade estocástica respectivamente. A modelização inclui, normalmente, uma componente determinística com reversão, isto é, uma componente que “força” a convergência da taxa instantânea para o seu valor de equilíbrio, e uma componente de difusão, veja-se Wu (2000).

3 - Estimação da EPTJ

A EPTJ actual (sem risco) é, evidentemente, um *input* fundamental nos modelos apresentados anteriormente; no entanto, como se referiu no primeiro ponto, esta não é directamente observável no mercado.

A sua estimação consiste em determinar as taxas de juro à vista, ou taxas futuras, ou a obtenção de funções de desconto a partir de um conjunto de obrigações livre de opções e sem risco de crédito. Note-se que, dada a relação entre as taxas de juro à vista e as taxas futuras, pode-se sempre obter umas em função das outras.

O primeiro método de estimação que se apresenta é o *Bootstrap*. Este método consiste em extrair de forma iterativa as rendibilidades do principal de uma sequência de obrigações de maturidades crescentes (com pagamento de cupões, livre de opções e sem risco de crédito), tendo em conta os seus preços de mercado e o princípio de ausência de arbitragem.

Esta metodologia apresenta, no entanto, algumas limitações, veja-se Choudrhy (2005), o que levou ao desenvolvimento de duas abordagens distintas: métodos paramétricos e métodos *spline*.

Os métodos paramétricos têm como objectivo modelizar a EPTJ atribuindo-lhe uma forma funcional.

Um *spline*, do ponto vista matemático, é um polinómio constituído por segmentos de polinómios individuais que estão unidos em determinados pontos, denominados *nós*, nos quais se garante a continuidade da primeira e segunda derivada.

Destacam-se os *splines* de interpolação, *splines de regressão* e *smoothing splines*.

Independentemente do método, Nawalkha (2001) destaca quatro requisitos fundamentais:

1. O método terá de garantir um ajustamento adequado aos dados.
2. As taxas de juro à vista e futuras terão de permanecer positivas para todas as maturidades.
3. A função de desconto, a função das taxas de juro à vista e a função das taxas futuras deverão ser contínuas e “suaves”.
4. O método deverá permitir um comportamento assintótico para as taxas de longo prazo.

Choudrhy (2005) acrescenta ainda o aspecto da flexibilidade, isto é, a capacidade do método se ajustar às diversas configurações possíveis da EPTJ actual.

3.1 Método *Bootstrap*.

Como se referiu, o método *Bootstrap* consiste em extrair de forma iterativa as taxas de juro à vista, utilizando para esse efeito os valores de mercado de uma sequência de obrigações com pagamentos de cupões. Deste modo, requer-se a existência de pelo menos uma obrigação cuja maturidade seja coincidente com a data do *bootstrap*.

De modo a ilustrar o método, considere-se um conjunto de K obrigações em que as maturidades equidistantes são dadas por t_1, t_2, \dots, t_K e os cupões apresentam a mesma periodicidade.

Seja,

$P(t_i)$ = preço da obrigação cuja maturidade é de t_i anos.

CF_{it_i} = total do cash flow gerado pela i – ésima obrigação na data t_i , com $i = 1, 2, \dots, K$

.

$y(t_i)$ = taxa de juro à vista capitalizado continuamente de maturidade t_i .

O preço de uma obrigação cuja maturidade é t_1 (pressupondo que não existem cash flows intermédios) é dado por

$$P(t_1) = CF_{1t_1} \times e^{-y(t_1) \times t_1}, \quad (3.1)$$

do qual se obtém directamente

$$y(t_1) = \frac{1}{t_1} \ln [CF_{1t_1}] \quad (3.2)$$

De modo a obter-se a taxa de juro à vista para o período seguinte, considere-se

$$P(t_2) = CF_{2t_1} \times e^{-y(t_1) \times t_1} + CF_{2t_2} \times e^{-y(t_2) \times t_2}, \quad (3.3)$$

onde CF_{2t_1} representa o primeiro cupão gerado pela obrigação de maturidade t_2 e CF_{2t_2} o valor do segundo cupão adicionado do reembolso do capital. Uma vez que $y(t_1)$ é conhecido, tem-se que

$$y(t_2) = \frac{1}{t_2} \ln \left[\frac{CF_{1t_2}}{P(t_2) - CF_{1t_1}} \right]. \quad (3.4)$$

Seguindo o mesmo raciocínio sequencial iterativo, obtém-se as taxas de juro à vista para as K maturidades.

De modo a obter-se uma solução directa, considere-se a seguinte abordagem matricial:

$$\begin{pmatrix} P(t_1) \\ P(t_2) \\ \vdots \\ P(t_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CF_{1t_1} & 0 & \dots & 0 \\ CF_{2t_1} & CF_{2t_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CF_{Kt_1} & CF_{Kt_2} & \dots & CF_{Kt_K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(t_1) \\ d(t_2) \\ \vdots \\ d(t_K) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

em que $d(t_i) = e^{-y(t_i) \times t_i}$.

Dado que a matriz dos cash flows admite inversa, (pois trata-se de matriz triangular onde nenhum dos elementos da diagonal principal é zero), vem

$$\begin{pmatrix} d(t_1) \\ d(t_2) \\ \vdots \\ d(t_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CF_{1t_1} & 0 & \dots & 0 \\ CF_{2t_1} & CF_{2t_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CF_{Kt_1} & CF_{Kt_2} & \dots & CF_{Kt_K} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P(t_1) \\ P(t_2) \\ \vdots \\ P(t_K) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Choudrhy (2005) destaca algumas limitações deste método, nomeadamente:

As taxas entre as datas *bootstrap* são obtidas por interpolação; logo, estas não têm em conta qualquer tipo de optimização.

A improbabilidade de se obter um conjunto de obrigações que produzam cash flows com intervalos constantes durante um período suficientemente longo. Ou seja, o número de obrigações poderá não coincidir com o número das maturidades *bootstrap* o que obriga a alguns ajustamentos *ad-hoc*.

Um terceiro aspecto advém do facto do método Bootstrap apresentar um excesso de ajustamento aos dados. Isto sucede porque o preço de mercado das obrigações inclui um determinado nível de ruído devido, por exemplo, aos diferentes níveis de liquidez e diferentes *spreads* de licitação e oferta (*bid-offer*) entre obrigações de curto e longo prazo, ao sistema fiscal, etc. Consequentemente, apesar da curva das taxas de juro à vista (após a aplicação do método de interpolação) poder ter uma configuração relativamente “suave”, a respectiva curva das taxas futuras poderá apresentar uma oscilação excessiva.

3.2 Métodos Paramétricos

Os métodos paramétricos têm como objectivo modelizar a EPTJ atribuindo-lhe uma forma funcional.

No entanto, quando se atribui uma forma funcional à EPTJ é importante que esta seja suficientemente flexível de modo a ajustar-se às configurações possíveis. Pois, apesar

de em condições normais de mercado a EPTJ ser uma função crescente em relação à maturidade, (dado que os investidores apresentam uma preferência pela liquidez e aversão ao risco de taxa de juro), esta poderá apresentar diversas formas, veja-se Choudrhy (2004).

3.2.1 Modelo Nelson-Siegel

Nelson e Siegel (1987) sugerem uma parametrização parcimoniosa das taxas futuras, utilizando para esse efeito uma única função exponencial, dada por

$$f^{NS}(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-t/\alpha} + \frac{\beta_2}{\alpha} t e^{-t/\alpha}, \quad (3.7)$$

onde t é a variável tempo e β_0 , β_1 , β_2 e α são os parâmetros a estimar.

A expressão (3.7) implica a seguinte equação para as taxas de juro à vista:

$$y^{NS}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^{NS}(u) du = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{\alpha}{t} (1 - e^{-t/\alpha}) - \beta_2 e^{-t/\alpha} \quad (3.8)$$

Uma das vantagens do modelo é que a função das taxas futuras apresenta um aspecto suave ao longo de todo o seu domínio. Outra vantagem é permitir que a EPTJ tenha um comportamento assintótico para as maturidades mais longas.

Uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^{NS}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y^{NS}(t) = \beta_0, \quad (3.9)$$

consequentemente, β_0 representa a taxa de longo prazo.

A taxa instantânea de curto prazo obtêm-se quando t tende para zero, isto é

$$\lim_{t \rightarrow 0} f^{NS}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} y^{NS}(t) = \beta_0 + \beta_1. \quad (3.10)$$

Note-se ainda que:

- A diferença entre a taxa de longo prazo e a taxa instantânea de curto prazo é $-\beta_2$, que poderá ser interpretado como sendo a inclinação da EPTJ, tanto para as taxas futuras como para as taxas de juro à vista.
 - β_2 afecta a curvatura da EPTJ. Com $\beta_2 > 0$, a EPTJ apresenta uma forma côncava e com $\beta_2 < 0$, uma forma convexa.
 - $\alpha > 0$, representa a velocidade de convergência da estrutura em relação à taxa de longo prazo; assim, quanto menor o seu valor maior a velocidade de convergência.
- A seguinte figura representa algumas configurações possíveis da EPTJ à vista obtidas pela expressão (3.8).

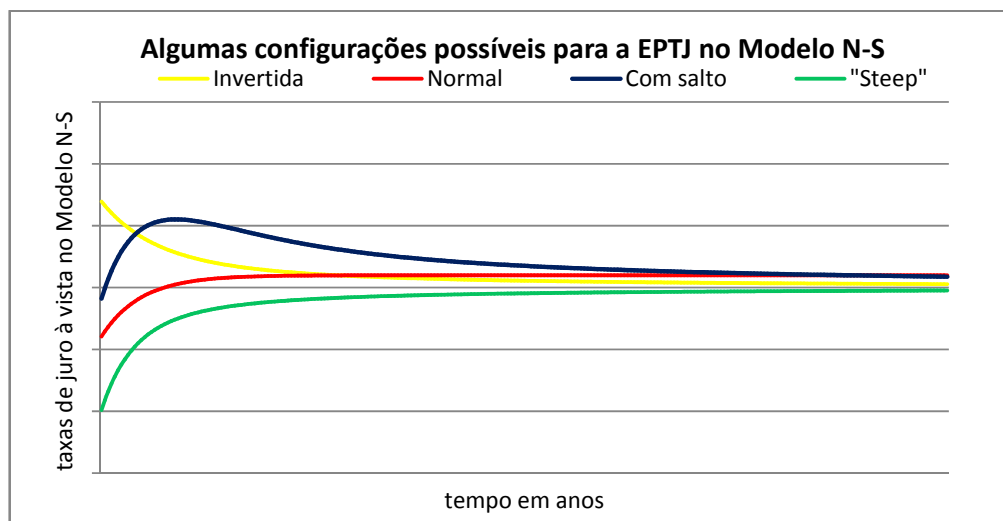


Figura 3.1 – Diversas configurações da EPTJ no modelo Nelson-Siegel

De modo a estimar-se os parâmetros, considere-se a função de desconto associada a (3.8)

$$d(t) = e^{-\beta_0 - (\beta_1 + \beta_2) \frac{\alpha}{t} (1 - e^{-t\alpha}) + \beta_2 e^{-t\alpha}}, \quad (3.11)$$

da qual se obtém a seguinte forma funcional para a função-preço de uma obrigação

$$P(t) = \sum_{t=1}^T CF_t e^{-\beta_0 - (\beta_1 + \beta_2) \frac{\alpha}{t} (1 - e^{-t\alpha}) + \beta_2 e^{-t\alpha}}, \quad (3.12)$$

em que T representa a maturidade da obrigação e CF_t o valor do cash flow da obrigação no momento t .

Seja ε_i a diferença entre o valor teórico da obrigação i obtido pela equação (3.12) e o seu valor de mercado, os parâmetros β_0 , β_1 , β_2 e α podem ser obtidos minimizando a soma dos erros quadráticos, ou seja

$$\text{Min}_{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \alpha} \sum_{i=1}^K \varepsilon_i^2, \quad (3.13)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} \beta_0 &> 0 \\ \beta_0 + \beta_1 &> 0 \\ \alpha &> 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dado que a função-preço não é linear, o processo de minimização requer a utilização de técnicas de optimização não lineares. Através da ferramenta *Solver* do Excel estima-se facilmente os parâmetros; no entanto, é necessário escolher cuidadosamente os seus valores de partida.

3.2.2 Modelo Svensson

O modelo Svensson é mais do que uma extensão do modelo anterior, em que a equação das taxas futuras é dada por

$$f^{Sv}(t) = f^{NS}(t) + \frac{\beta_3}{\lambda} t e^{-t/\lambda}. \quad (3.15)$$

O último termo de (3.15), ao introduzir mais dois parâmetros, adiciona flexibilidade à forma funcional de Nelson-Siegel. Note-se que o modelo é actualmente (2008) utilizado pelo Banco Central Europeu.

Seja $y^{Sv}(t)$ as taxas de juro à vista no modelo Svensson, vem

$$y^{sv}(t) = y^{NS}(t) + \frac{\beta_3}{\alpha T} \int_0^T t e^{-t/\lambda} dt = y^{NS}(t) + \frac{\beta_3}{\alpha} \left[-\lambda e^{-T/\lambda} + \frac{\lambda^2}{T} (1 - e^{-T/\lambda}) \right]. \quad (3.16)$$

Anderson e Sleath (1999) demonstram, no entanto, que nos métodos paramétricos, incluindo no modelo de Svensson, uma variação de uma taxa de juro à vista num extremo pode vir a ter um impacto significativo na função no extremo apostado o que é claramente uma propriedade indesejável.

3.3 Métodos *spline*

Um *spline* consiste num polinómio constituído por segmentos de polinómios individuais que estão unidos em determinados pontos (*nós*) nos quais se garante a continuidade da primeira e segunda derivada.

Estas características permitem que a curva correspondente ao *spline* apresente um aspecto “suave” dando a “ilusão” de que se trata apenas de um único polinómio (de ordem superior).

As taxas de juro à vista obtidas pelo método *Bootstrap* podem servir como *nós* para a aplicação dos métodos *spline*, veja-se McCulloch (1971).

3.3.1 Interpolação por *spline* cúbico

Embora não seja prática comum, quando se pretende um ajustamento total às taxas observadas pelo método *Bootstrap* (obrigações ou taxas *swap*), as maturidades intermédias podem ser obtidas directamente através de interpolação por *spline* cúbico (ao invés da interpolação linear).

Interpolar por *spline* cúbico envolve a junção de polinómios de terceiro grau, de modo a que a função *spline* intercepte “suavemente” todos os pontos (da curva de rendimentos).

Define-se então um *spline* cúbico:

Considere-se que $\{(t_j, y_j): j=0,1,\dots,K\}$ são $K+1$ pontos (*nós*) distintos em que $t_0 < t_1 < \dots < t_K$. A função $f(t)$ é um *spline* cúbico se existirem n polinómios de terceiro grau com coeficientes $a_j, b_j, c_j,$ e d_j a satisfizer as seguintes condições:

I. $f(t) = f_j(t) = a_j + b_j(t-t_j) + c_j(t-t_j)^2 + d_j(t-t_j)^3,$ para $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ e $j=0,1,\dots,K-1,$ ou seja, $f(t)$ é constituído por segmentos de polinómios de terceiro grau.

II. $f(t_j) = y_j,$ com $j=0,1,\dots,K,$ ou seja, o *spline* intercepta todos os pontos (*nós*).

III. $f_j(t_{j+1}) = f_{j+1}(t_{j+1}),$ com $j=0,1,\dots,K-2,$ isto é, o *spline* é uma função contínua nos *nós* interiores.

IV. $f'_j(t_{j+1}) = f'_{j+1}(t_{j+1}),$ com $j=0,1,\dots,K-2,$ a primeira derivada do *spline* contínua nos *nós* interiores

V. $f''_j(t_{j+1}) = f''_{j+1}(t_{j+1}),$ com $j=0,1,\dots,K-2,$ a segunda derivada do *spline* contínua nos *nós* interiores.

As condições IV e V garantem que o *spline* é “suave” nos *nós* interiores.

Note-se que $n+1$ pontos dão origem a um segmento de n polinómios individuais, que por sua vez originam $4n$ coeficientes por determinar. Mas as condições de II a V implicam respectivamente $K+1,$ $K-1,$ $K-1$ e $K-1$ restrições, ou seja $4K-2$ no total. Assim, é necessário “impor” duas condições iniciais de modo a igualar o número de incógnitas ao número de equações.

Os coeficientes do *spline* cúbico são obtidos em função da segunda derivada dos polinómios individuais, pois assim o problema reduz-se a um sistema de equações lineares. Note-se que derivando duas vezes $f_j(t)$ “perdem-se” os coeficientes a_j e b_j ;

no entanto, é directo que $a_j = y_j$, de modo a satisfazer a condição II e o coeficiente b_j obtém-se facilmente se se conhecer a_j , c_j e d_j .

Considere-se, assim, a equação da recta:

$$f_j''(t) = f''(t_j) \frac{t-t_{j+1}}{t_j-t_{j+1}} + f''(t_{j+1}) \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}. \quad (3.17)$$

Integrando duas vezes a expressão anterior, tendo em conta que $m_j = f''(t_j)$ e $h_j = t_{j+1} - t_j$, obtém-se:

$$f_j(t) = \frac{m_j}{6h_j} (t_{j+1} - t)^3 + \frac{m_{j+1}}{6h_j} (t - t_j)^3 + p_j(t_{j+1} - t) + q_j(t - t_j), \quad (3.18)$$

em que p_j e q_j são as constantes desconhecidas de integração, e os seus coeficientes definidos de modo a satisfazer as condições de fronteira.

Substituindo x_j em (3.18), obtém-se $p_j = y_j/h_j - m_j \times h_j/6$, tendo em conta que $f_j(t_j) = y_j$. Do mesmo modo, substituindo t_{j+1} em (3.18), deduz-se que $q_j = y_{j+1}/h_j - m_{j+1} \times h_j/6$. Substituindo as expressões de p_j e q_j em (3.18), vem

$$f_j(t) = \frac{m_j}{6h_j} (t_{j+1} - t)^3 + \frac{m_{j+1}}{6h_j} (t - t_j)^3 + \left(\frac{y_j}{h_j} - \frac{m_j h_j}{6} \right) (t_{j+1} - t) + \left(\frac{y_{j+1}}{h_j} - \frac{m_{j+1} h_j}{6} \right) (t - t_j). \quad (3.19)$$

De modo a determinar os valores dos $m_j = f''(t_j)$, tem-se pela condição IV que

$$f_j'(t_j) = f_{j-1}'(t_j) \Leftrightarrow h_{j-1} m_j + g_j m_j + h_j m_{j+1} = u_j, \quad (3.20)$$

em que $j = 1, 2, \dots, n-1$, $u_j = 6 \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}} \right)$ e $g_j = 2(h_{j-1} + h_j)$.

Quando m_0 e m_n são determinados de forma exógena, o sistema (3.20) pode ser expresso na seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix}
g_1 & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
h_1 & g_2 & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & h_2 & g_3 & h_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & h_3 & g_4 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{K-3} & h_{K-3} & 0 & m_{K-3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{K-3} & g_{K-2} & h_{K-2} & m_{K-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{K-2} & g_{K-1} & m_{K-3}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
m_1 \\
m_2 \\
m_3 \\
m_4 \\
\vdots \\
m_{K-3} \\
m_{K-2} \\
m_{K-3}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
u_1 - h_0 m_0 \\
u_2 \\
u_3 \\
u_4 \\
\vdots \\
u_{K-3} \\
u_{K-2} \\
u_{K-1} - h_{K-1} m_K
\end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$(K-1) \times (K-1)$
 $(K-1) \times 1$
 $(K-1) \times 1$

ou

$$\mathbf{Hm} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{m} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{v}. \quad (3.22)$$

Uma vez determinados os valores de m_1, m_2, \dots, m_{K-1} é directo que

$$c_j = \frac{m_j}{2}, \quad j = 1, \dots, K-1, \quad (3.23)$$

do qual se obtém

$$d_j = \frac{m_{j+1} - m_j}{6h_j}, \quad j = 0, \dots, K-2. \quad (3.24)$$

Pela condição II, vem

$$a_j = y_j \quad j = 0, \dots, K-1. \quad (3.25)$$

Tendo determinado a_j, c_j e d_j , facilmente se deduz (tendo em conta a propriedade

III: $a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 = y_{j+1}$) que

$$b_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{h_j(2m_j + m_{j+1})}{6}, \quad j = 0, \dots, K-2. \quad (3.26)$$

Klugman *et. al.* (2004) sugerem as seguintes restrições para m_0 e m_K :

- *Spline* cúbico natural: $m_0 = 0$ e $m_K = 0$. Esta opção minimiza a curvatura do *spline* pois nestes segmentos os polinómios são lineares.

- *Spline* cúbico de curvatura ajustada: fixa-se m_0 e m_K num valor que se considerar mais adequado.

- *Parabolic run out spline*: $m_0 = m_1$ e $m_K = m_{K-1}$. O que implica, tendo em conta (3.24), mais duas restrições: $d_0 = 0$ e $d_K = 0$.

- Condição *not a knot*: $m_0 = m_1 - \frac{h_0(m_2 - m_1)}{h_1}$ e $m_K = m_{K-1} - \frac{h_{K-1}(m_{K-1} - m_{K-2})}{h_{K-2}}$. As duas

restrições obtêm-se impondo a continuidade da terceira derivada em ambas as extremidades, ou seja: $f_0'''(t_1) = f_1'''(t_1)$ e $f_{K-2}'''(t_{K-1}) = f_{K-1}'''(t_{K-1})$. Logo, o polinómio sobre o intervalo $[t_0, t_2]$ é o mesmo, assim como o polinómio sobre $[t_{K-2}, t_K]$.

- *Clamped cubic spline*:

$$m_0 = \frac{3}{h_0} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - f_0'(t_0) \right) - \frac{m_1}{2} \text{ e } m_K = \frac{3}{h_{K-1}} \left(f_{K-1}'(t_K) - \frac{y_K - y_{K-1}}{h_{K-1}} \right) - \frac{m_{K-1}}{2}.$$

As restrições obtêm-se fixando a inclinação $f_0'(t_0)$ e $f_{K-1}'(t_K)$ em cada extremidade.

Klugman *et. al.* (2004) mostram que quando os polinómios do *spline* são do terceiro grau, nomeadamente o *spline* cúbico natural ou o *clamped cubic spline*, obtêm-se a função de oscilação/curvatura mínima que intercepta todos os pontos (*nós*). A “suavidade” é uma propriedade desejável numa função representativa da EPTJ. Uma medida popular do nível de curvatura total de uma função é dada por $\int_{t_0}^{t_K} [f''(t)]^2 dt$, veja-se o Anexo 2.

Apesar do *spline* cúbico apresentar esta característica, na prática, o “ruído” existente no preço das obrigações faz com que a *interpolação* cúbica apresente um excesso de oscilação (*sawtooth pattern*).

3.3.2 Spline de regressão de McCulloch

De modo a minimizar a oscilação do *spline* cúbico, resultante do “ruído” de mercado, McCulloch (1975) propõe que a função de desconto seja estimada por B-*splines* de terceiro grau, isto é (em termos genéricos), por uma função que resulta na combinação linear de *splines* cúbicos (base) compostos por quatro segmentos.

Note-se que normalmente a oscilação do *spline* é uma função crescente do número de pontos de intercepção; portanto, o autor propõe para a função desconto um número de *nós* igual à raiz quadrada do número de obrigações, arredondado ao número inteiro mais próximo.

Considere-se a seguinte relação entre o preço de mercado (por exemplo: o valor médio entre a licitação e oferta) de uma obrigação de maturidade t_m e a função de desconto $d(t)$:

$$P(t_m) = \sum_{j=1}^m CF_{t_j} \times d(t_j) + \varepsilon. \quad (3.27)$$

O objectivo consiste em definir a função *spline* $d(t)$.

Para esse efeito, considere-se um conjunto de K obrigações cujas maturidades são, por ordem crescente, t_1, t_2, \dots, t_K . A série das maturidades pode ser dividida em $s-2$ intervalos o que resulta em $s-1$ *nós*: T_1, T_2, \dots, T_{s-1} , onde $T_1 = 0$ e $T_{s-1} = t_k$. O B-*spline* cúbico da função de desconto define-se pela seguinte equação:

$$d(t) = 1 + \sum_{i=1}^s \alpha_i g_i(t), \quad (3.28)$$

onde $g_1(t), g_2(t), \dots, g_s(t)$ definem o conjunto (base) de *splines* polinomiais de terceiro grau e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ são parâmetros (pesos) a estimar.

Note-se que a definição de função de desconto implica por si as seguintes restrições

$$g_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (3.29)$$

Por outro lado, as restrições de continuidade da função e das primeiras duas derivadas de $g_i(t)$ nos nós em T_i , sobre os segmentos adjacentes $[T_{i-1}, T_i]$ e $[T_i, T_{i+1}]$, originam as seguintes restrições para as funções base $g_1(t), g_2(t), \dots, g_s(t)$:

Caso 1: $i < s$

$$g_i(t) = \begin{cases} 0 & t < T_{i-1} \\ \frac{(t - T_{i-1})^3}{6(T_i - T_{i-1})}, & T_{i-1} \leq t < T_i \\ \frac{(T_i - T_{i-1})^2}{6} + \frac{(T_i - T_{i-1})(t - T_i) + (t - T_i)^2}{2} - \frac{(t - T_i)^3}{6(T_{i+1} - T_i)} & T_i \leq t < T_{i+1} \\ (T_{i+1} - T_{i-1}) \left(\frac{2T_{i+1} - T_i - T_{i-1}}{6} + \frac{t - T_{i+1}}{2} \right) & t \geq T_{i+1} \end{cases} \quad (3.30)$$

Caso 2: $i = s$

$$g_i(t) = t \quad (3.31)$$

Substituindo (3.28) em (3.27), obtém-se que

$$P(t_m) - \sum_{j=1}^m CF_{t_j} = \sum_{i=1}^s \alpha_i \sum_{j=1}^m CF_{t_j} g_i(t_j) + \varepsilon \quad (3.32)$$

Dado que a função (3.32) é linear em relação a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, o autor propõe que estes sejam estimados através do método dos mínimos quadrados ordinários, ou seja,

$$\mathbf{a} = [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}, \quad (3.33)$$

em que

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}_{(s \times 1)}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} P(t_1) - CF_{t_1} \\ P(t_2) - \sum_{j=1}^{t_2} CF_{t_j} \\ \vdots \\ P(t_K) - \sum_{j=1}^{t_K} CF_{t_j} \end{bmatrix}_{(K \times 1)} \quad \text{e} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} CF_{t_1} \times g_1(t_1) & CF_{t_1} \times g_2(t_1) & \dots & CF_{t_1} \times g_s(t_1) \\ \sum_{j=1}^{t_2} CF_{t_j} \times g_1(t_j) & \sum_{j=1}^{t_2} CF_{t_j} \times g_2(t_j) & \dots & \sum_{j=1}^{t_2} CF_{t_j} \times g_s(t_j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{t_K} CF_{t_j} \times g_1(t_j) & \sum_{j=1}^{t_K} CF_{t_j} \times g_2(t_j) & \dots & \sum_{j=1}^{t_K} CF_{t_j} \times g_s(t_j) \end{pmatrix}_{(K \times s)}$$

partindo do pressuposto que a obrigação de maturidade t_1 apenas liberta cash flows (cupão mais principal) na data t_1 .

McCulloch recomenda que os *nós* sejam escolhidos de modo a haver aproximadamente o mesmo número de obrigações em cada segmento de maturidade. Define-se, então:

$$T_i = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ t_h + \theta(t_{h+1} - t_h) & 2 \leq i \leq s-2, \\ t_k & i = s-1 \end{cases} \quad (3.34)$$

onde h é um número inteiro definido por

$$h = INT \left[\frac{(i-1)K}{s-2} \right], \quad (3.35)$$

o parâmetro θ é dado pela seguinte expressão

$$\theta = \frac{(i-1)K}{s-2} - h. \quad (3.36)$$

e
$$s = Round \left[\sqrt{K} \right]. \quad (3.37)$$

McCulloch reconhece (devido à existência de heteroscedasticidade) que os erros da regressão poderão ser crescentes com a maturidade das obrigações, devido, por exemplo, ao facto de quanto maior for a maturidade, maior será *spread* licitação-oferta, o nível de ilíquidez do título, etc.

Fisher Nychka e Zervo (1995) argumentam que os *splines* de regressão produzem ainda uma curva de taxas futuras com excessiva oscilação, principalmente para as maturidades

mais longas, e que a escolha dos *nós* influencia directamente os parâmetros do *spline*, o que é não é desejável uma vez que estes são definidos exógenamente.

3.3.3 Modelo de Fisher-Nychka-Zervos (*smoothing spline*)

Fisher, Nychka e Zervos (1995) apresentam um modelo *smoothing spline* para a estimação da EPTJ. A vantagem do modelo em relação ao anterior é a introdução de um parâmetro que penaliza a oscilação do *spline*. Quanto maior for essa penalização, menor será o número de parâmetros do *spline*. Por conseguinte, apenas um valor controla toda a parametrização do modelo, que funciona como um *trade-off* entre ajustamento e “suavidade”.

Outro aspecto a ter em conta é que a modelização das taxas de desconto é obtida directamente pela curva das taxas futuras, pois

$$P(t_m) = \sum_{j=1}^m CF_{t_j} \times d(t_j) = \sum_{j=1}^m CF_{t_j} \times e^{-t_j y(t_j)} = \sum_{j=1}^m CF_{t_j} \times e^{-\int_0^{t_j} f(t) dt}, \quad (3.38)$$

mantendo as variáveis mantêm os significados anteriores.

Se se representar o parâmetro de penalização por λ , o modelo é definido pela seguinte expressão

$$\text{Min}_{f(t)} \left[\sum_{i=1}^K \{P_i - \hat{P}_i(f(t))\}^2 + \lambda \int_0^{t_K} [f''(t)]^2 dt \right], \quad (3.39)$$

onde P_i é o valor de mercado da obrigação i , $f(t)$ é a função *basis spline* das taxas futuras e $\hat{P}_i(f(t))$ é o valor teórico da obrigação i .

Se o número de *nós* for igual ao número de observações (obrigações), então está-se perante um ajustamento total dos dados (*spline de interpolação cúbica*); e por conseguinte, o erro quadrático (primeiro termo de (3.39)) será zero, mas em

contrapartida o segundo termo da mesma expressão poderá apresentar um nível de curvatura total bastante elevado.

Se a função $f(t)$ for uma recta, então o valor da curvatura total será zero, mas o erro quadrático será certamente elevado.

Por outro lado, quanto menor (maior) o valor de λ , maior o peso atribuído ao ajustamento (à oscilação).

3.3.4 Modelo de Waggoner

Waggoner (1997) estende o modelo de Fisher, Nychka e Zervos, de modo que a penalização da oscilação seja superior para maturidades mais longas, pois nesses segmentos a EPTJ é praticamente horizontal. Argumenta também que se λ for uma função crescente do tempo, então o modelo também se torna mais adequado para apreçar obrigações de curto prazo.

Waggoner (1997) p. 10 *“By moving to a variable roughness penalty, we retain flexibility on the short end, while damping oscillations on the long end, and thus are better able to price short term securities”*.

Considere-se então

$$\text{Min}_{f(t)} \left[\sum_{i=1}^K \{P_i - \hat{P}_i(f(t))\}^2 + \int_0^{t_k} \lambda(t) [f''(t)]^2 dt \right], \quad (3.40)$$

onde

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0,1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 100 & 1 \leq t \leq 10 \\ 100.000 & t \geq 10 \end{cases}, \quad (3.41)$$

e as restantes variáveis mantêm o seu significado anterior.

Uma vantagem dos métodos *splines*, em relação aos modelos paramétricos, resulta de serem construídos por segmentos que se movimentam independentemente uns dos

outros; a principal desvantagem advém do facto de ser necessária uma gestão entre a oscilação da função *spline* e o ajustamento aos dados.

4 – Risco de taxa de juro, Duração e Convexidade

Ilustração num contexto do QIS4

Neste ponto, analisaremos o exercício proposto pelo QIS4 relativamente ao sub-módulo do risco de taxa de juro (módulo risco de mercado) numa carteira de acidentes de trabalho (AT) englobando todos os seus activos e passivos sensíveis a deslocações da EPTJ em 31-12-2007.

O objectivo essencial consiste em ilustrar a aplicação de alguns elementos apresentados nos pontos precedentes.

4.1 Descrição do exercício do QIS4 para o risco de taxa de juro

Nas especificações técnicas (TS) do QIS4 no ponto TS.IX.B.1, vem

“Assets sensitive to interest rate movements will include fixed-income investments, insurance liabilities, and financing instruments (loan capital) and interest-rate derivatives. Liability cash-flows received in the future will be sensitive to a change in the rate at which those cash-flows are discounted”.

Os valores presentes dos cash flows relativamente ao activo e ao passivo sensíveis a variações das taxas de juro (de capitalização discreta) poderão ser determinados pela EPTJ fornecida no *site* da CEIOPS, cujas taxas para a zona EURO são dadas pela tabela 4.1.

| Maturidade (anos) | taxas | Maturidade (anos) | taxas | Maturidade (anos) | taxas | Maturidade (anos) | taxas |
|-------------------|---------|-------------------|---------|-------------------|---------|-------------------|---------|
| 0 | 3,9160% | 18 | 4,9514% | 38 | 4,7973% | 58 | 4,5543% |
| 0,25 | 4,6840% | 19 | 4,9648% | 39 | 4,7864% | 59 | 4,5459% |
| 0,5 | 4,7071% | 20 | 4,9769% | 40 | 4,7760% | 60 | 4,5379% |
| 1 | 4,6960% | 21 | 4,9734% | 41 | 4,7586% | 61 | 4,5301% |
| 2 | 4,5262% | 22 | 4,9702% | 42 | 4,7420% | 62 | 4,5225% |
| 3 | 4,5097% | 23 | 4,9674% | 43 | 4,7261% | 63 | 4,5152% |
| 4 | 4,5330% | 24 | 4,9647% | 44 | 4,7110% | 64 | 4,5081% |
| 5 | 4,5529% | 25 | 4,9623% | 45 | 4,6966% | 65 | 4,5013% |
| 6 | 4,5797% | 26 | 4,9503% | 46 | 4,6828% | 66 | 4,4946% |
| 7 | 4,6137% | 27 | 4,9393% | 47 | 4,6695% | 67 | 4,4882% |
| 8 | 4,6529% | 28 | 4,9290% | 48 | 4,6569% | 68 | 4,4819% |
| 9 | 4,6975% | 29 | 4,9195% | 49 | 4,6447% | 69 | 4,4758% |
| 10 | 4,7417% | 30 | 4,9105% | 50 | 4,6331% | 70 | 4,4699% |
| 11 | 4,7843% | 31 | 4,8932% | 51 | 4,6219% | 71 | 4,4642% |
| 12 | 4,8197% | 32 | 4,8769% | 52 | 4,6111% | 72 | 4,4586% |
| 13 | 4,8508% | 33 | 4,8616% | 53 | 4,6007% | 73 | 4,4532% |
| 14 | 4,8775% | 34 | 4,8472% | 54 | 4,5907% | 74 | 4,4479% |
| 15 | 4,9006% | 35 | 4,8337% | 55 | 4,5811% | 75 | 4,4428% |
| 16 | 4,9197% | 36 | 4,8208% | 56 | 4,5719% | | |
| 17 | 4,9365% | 37 | 4,8087% | 57 | 4,5629% | | |

Tabela 4.1 – Taxas de juro à vista do cenário inicial

O exercício propõe que se analise o impacto de dois cenários predefinidos em que, no primeiro, a EPTJ da tabela 4.1 sofre um choque instantâneo no sentido ascendente, e no segundo, as mesmas taxas sofrem um choque instantâneo no sentido descendente.

A calibração dos choques tem como objectivo reflectir um VaR a 99,5% com um horizonte temporal de um ano.

A nova estrutura no cenário ascendente e descendente deriva da multiplicação da EPTJ inicial por $(1+s^{asc.})$ e por $(1+s^{desc.})$ respectivamente, em que $s^{asc.}$ e $s^{desc.}$ para a zona Euro são dados pela tabela 4.2 (veja-se TS.IX.B.5):

| | | | | | | | |
|----------------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|
| <i>Maturidade t (anos)</i> | <i>1</i> | <i>2</i> | <i>3</i> | <i>4</i> | <i>5</i> | <i>6</i> | <i>7</i> |
| <i>variação relativa $s^{asc.}(t)$</i> | 0,94 | 0,77 | 0,69 | 0,62 | 0,56 | 0,52 | 0,49 |
| <i>variação relativa $s^{desc.}(t)$</i> | -0,51 | -0,47 | -0,44 | -0,42 | -0,4 | -0,38 | -0,37 |
| <i>Maturidade t (anos)</i> | <i>8</i> | <i>9</i> | <i>10</i> | <i>11</i> | <i>12</i> | <i>13</i> | <i>14</i> |
| <i>variação relativa $s^{asc.}(t)$</i> | 0,46 | 0,44 | 0,42 | 0,42 | 0,42 | 0,42 | 0,42 |
| <i>variação relativa $s^{desc.}(t)$</i> | -0,35 | -0,34 | -0,34 | -0,34 | -0,34 | -0,34 | -0,34 |
| <i>Maturidade t (anos)</i> | <i>15</i> | <i>16</i> | <i>17</i> | <i>18</i> | <i>19</i> | <i>20+</i> | |
| <i>variação relativa $s^{asc.}(t)$</i> | 0,42 | 0,41 | 0,4 | 0,39 | 0,38 | 0,37 | |
| <i>variação relativa $s^{desc.}(t)$</i> | -0,34 | -0,33 | -0,33 | -0,32 | -0,31 | -0,31 | |

Tabela 4.2 – Choques à EPTJ propostos no QIS4

Assim, a nova taxa de juro a um ano no cenário ascendente é

$$(1+0,046960) \times (1+0,94) = 0,091102.$$

Para o cálculo da carga de capital para o risco de taxa de juro definem-se as seguintes variáveis:

A_0 = valor presente do activo a 31-12-2007 obtido pela EPTJ inicial.

L_0 = valor presente do passivo a 31-12-2007 obtido pela EPTJ inicial.

$A_{asc.}$ = valor presente do activo a 31-12-2007 no cenário ascendente.

$L_{asc.}$ = valor presente do passivo a 31-12-2007 no cenário ascendente.

$A_{desc.}$ = valor presente do activo a 31-12-2007 no cenário descendente.

$L_{desc.}$ = valor presente do passivo a 31-12-2007 no cenário descendente.

Define-se ainda,

$V_0 = A_0 - L_0$, isto é, a situação líquida inicial.

$V_{asc.} = A_{asc.} - L_{asc.}$, isto é, a situação líquida após o choque ascendente.

$V_{desc.} = A_{desc.} - L_{desc.}$, isto é, a situação líquida após o choque descendente.

A carga de capital para o risco de taxa de juro é dado pelo módulo do cenário mais gravoso isto é, $|\text{Min}[V_{asc.}, V_{desc.}, 0]|$.

4.2 Passivo da carteira de AT

Os cash flows da tabela 4.3 representam as responsabilidades de uma carteira hipotética de acidentes de trabalho.

Note que os cash flows do passivo estão anualizados e pressupõe-se que os pagamentos são efectuados a meio do ano.

| Data | CF estimado | Data | CF estimado | Data | CF estimado |
|------------|--------------|------------|--------------|------------|-------------|
| 30-06-2008 | 521.418,99 € | 30-06-2025 | 239.136,75 € | 30-06-2042 | 48.449,84 € |
| 30-06-2009 | 506.010,94 € | 30-06-2026 | 228.031,21 € | 30-06-2043 | 41.682,53 € |
| 30-06-2010 | 488.867,95 € | 30-06-2027 | 215.130,68 € | 30-06-2044 | 35.553,22 € |
| 30-06-2011 | 475.644,02 € | 30-06-2028 | 201.768,40 € | 30-06-2045 | 30.047,18 € |
| 30-06-2012 | 456.045,46 € | 30-06-2029 | 188.996,00 € | 30-06-2046 | 25.159,33 € |
| 30-06-2013 | 439.630,77 € | 30-06-2030 | 175.248,24 € | 30-06-2047 | 20.850,65 € |
| 30-06-2014 | 421.324,42 € | 30-06-2031 | 161.623,10 € | 30-06-2048 | 17.086,95 € |
| 30-06-2015 | 405.848,86 € | 30-06-2032 | 148.753,80 € | 30-06-2049 | 13.814,15 € |
| 30-06-2016 | 384.712,23 € | 30-06-2033 | 136.374,03 € | 30-06-2050 | 10.998,19 € |
| 30-06-2017 | 367.039,94 € | 30-06-2034 | 124.400,78 € | 30-06-2051 | 8.591,03 € |
| 30-06-2018 | 345.560,76 € | 30-06-2035 | 113.484,12 € | 30-06-2052 | 6.559,58 € |
| 30-06-2019 | 329.187,15 € | 30-06-2036 | 102.433,22 € | 30-06-2053 | 4.859,99 € |
| 30-06-2020 | 313.252,79 € | 30-06-2037 | 91.900,32 € | 30-06-2054 | 3.446,62 € |
| 30-06-2021 | 297.713,21 € | 30-06-2038 | 81.953,26 € | 30-06-2055 | 2.289,15 € |
| 30-06-2022 | 281.446,01 € | 30-06-2039 | 72.623,79 € | 30-06-2056 | 1.351,10 € |
| 30-06-2023 | 267.438,58 € | 30-06-2040 | 63.925,64 € | 30-06-2057 | 597,27 € |
| 30-06-2024 | 252.255,44 € | 30-06-2041 | 55.863,37 € | | |

Tabela 4.3 – Cash flows das responsabilidades

Acrescenta-se ainda que, tendo por base a metodologia basilar do novo regime de Solvência, as provisões técnicas (sob análise do pilar I), dada a inexistência de um mercado de transacção de responsabilidades, serão estabelecidas por via de um método de cálculo reconhecido que salvguarde os direitos dos segurados e seja harmonizável a nível Europeu. Deste modo, assistir-se-á a uma mudança considerável das regras e pressupostos actualmente utilizados no cálculo das responsabilidades, passando-se de uma abordagem prudencial, baseada em regras, para uma abordagem de mercado baseada em princípios.

4.3 Activos da carteira AT

Para os activos, será considerada uma carteira de Obrigações do Tesouro nacionais, cujas características estão descritas no quadro 4.4, de acordo com o Instituto de Gestão da Tesouraria e do Crédito Público, I.P.

| Título | Código ISIN | Coupon | Coupon Rate | 1st Sett Date | Int Accrual Date | Maturity Date | 1 st Coupon Date | Business Day Convention | Accrual Day Count Basis |
|--------------------|--------------|--------|-------------|---------------|------------------|---------------|------------------|-------------------------|-------------------------|
| OT 5,375% Jun 2008 | PTOTEBOE0012 | Anual | 5,375% | 10-02-1998 | 23-06-1998 | 23-06-2008 | 23-06-2008 | Preceding | Act/Act |
| OT 3,95% Jul 2009 | PTOTECOEO011 | Anual | 3,950% | 22-01-1999 | 22-01-1999 | 15-07-2009 | 15-07-1999 | Following | Act/Act |
| OT 5,85% Mai 2010 | PTOTEHOEO008 | Anual | 5,850% | 20-01-2000 | 20-01-2000 | 20-05-2010 | 20-05-2000 | Following | Act/Act |
| OT 5,15% Jun 2011 | PTOTEJOEO006 | Anual | 5,150% | 13-03-2001 | 13-03-2001 | 15-06-2011 | 15-06-2002 | Following | Act/Act |
| OT 5% Jun 2012 | PTOTEKOE0003 | Anual | 5,000% | 13-02-2002 | 13-02-2002 | 15-06-2012 | 15-06-2003 | Following | Act/Act |
| OT 5,45% Set 2013 | PTOTEGOE0009 | Anual | 5,450% | 26-05-1998 | 26-05-1998 | 23-09-2013 | 23-09-1999 | Preceding | Act/Act |
| OT 3,35% Out 2015 | PTOTE3OE0017 | Anual | 3,350% | 13-07-2005 | 13-07-2005 | 15-10-2015 | 15-10-2006 | Following | Act/Act |
| OT 4,35% Out 2017 | PTOTELOEO010 | Anual | 4,350% | 03-05-2007 | 03-05-2007 | 16-10-2017 | 16-10-2007 | Following | Act/Act |
| OT 3,85% Abr 2021 | PTOTEYOE0007 | Anual | 3,850% | 23-02-2005 | 23-02-2005 | 15-04-2021 | 15-04-2006 | Following | Act/Act |
| OT 4,10% Abr 2037 | PTOTESOE0007 | Anual | 4,100% | 22-03-2006 | 22-03-2006 | 15-04-2037 | 15-04-2007 | Following | Act/Act |

Tabela 4.4 – Obrigações do Tesouro Nacionais

Independentemente de se considerar obrigações de cupão fixo governamentais ou obrigações de cupão fixo *corporate*, a EPTJ utilizada para se obter o valor teórico de cada título será a mesma (EPTJ sem risco), pois o risco de crédito é determinado num sub-módulo à parte. Para efeitos de ilustração, considera-se que os títulos são perfeitamente divisíveis.

4.4 Efeitos dos choques propostos pelo QIS4 na carteira AT

Dado que dificilmente os cash flows da carteira serão coincidentes com os prazos da tabela 4.1, torna-se necessário definir um método de interpolação da EPTJ. De modo a obter uma EPTJ contínua e diferenciável, capaz de interceptar todas as taxas das estruturas propostas pelo QIS4, propõe-se o método de interpolação cúbica. O seguinte gráfico ilustra o *natural cubic spline* da tabela 4.1.

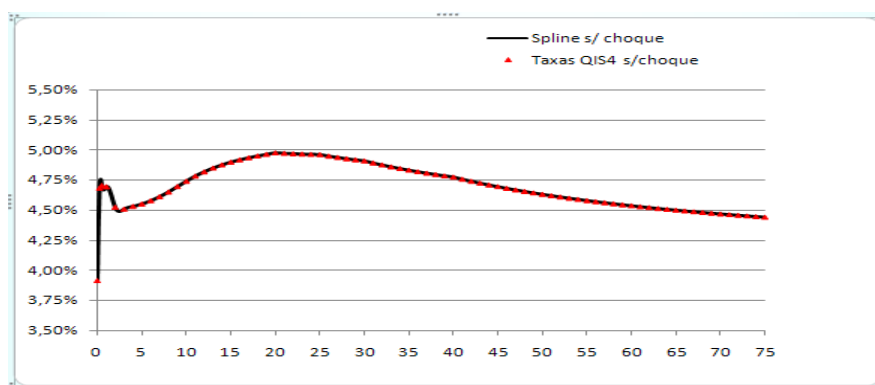


Figura 4.1 – *Natural cubic spline* do cenário inicial

Como se pode observar, existe um “salto” (não desejável) no início da curva. De modo a eliminar/minimizar o “salto”, optou-se por se utilizar um *clamped cubic spline* (descrito no ponto 3.3.1) com $f'_0(t_0)=0,086$ e para o último nó não foi necessário qualquer tipo de ajustamento; logo, $f'_{74}(t_{75})=0$. Note-se ainda que as taxas propostas pelo QIS4 não foram alvo de qualquer processo de suavização (veja-se TS.XVII.A - Annex TP1); portanto, é natural que a EPTJ interpolada por este método não apresente um aspecto “suave”.

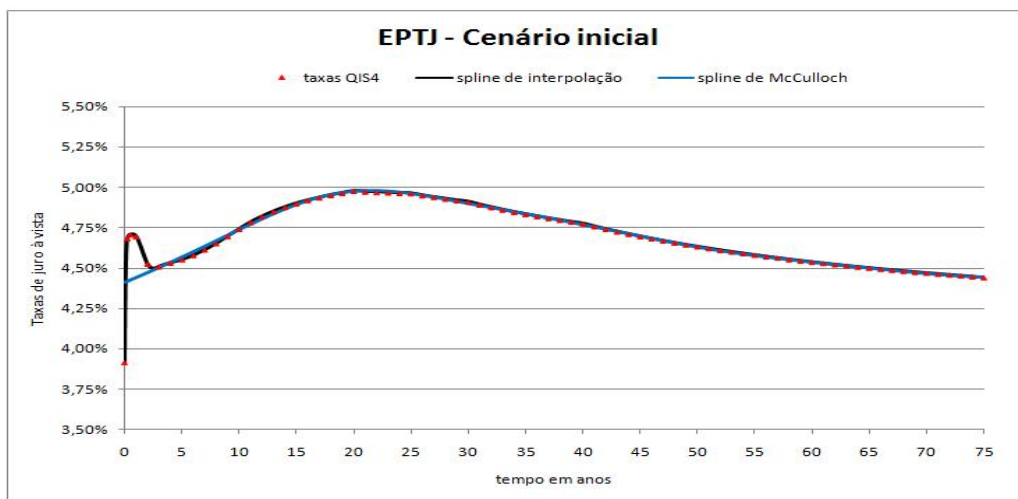


Figura 4.2 – *Clamped cubic spline* e *spline* de McCulloch no cenário inicial

Para a EPTJ do cenário ascendente optou-se novamente pelo *clamped cubic spline* com $f'_0(t_0)=0,16$ e $f'_{74}(t_{75})=0$, e para a EPTJ do cenário descendente a interpolação foi obtida através do *natural cubic spline*.

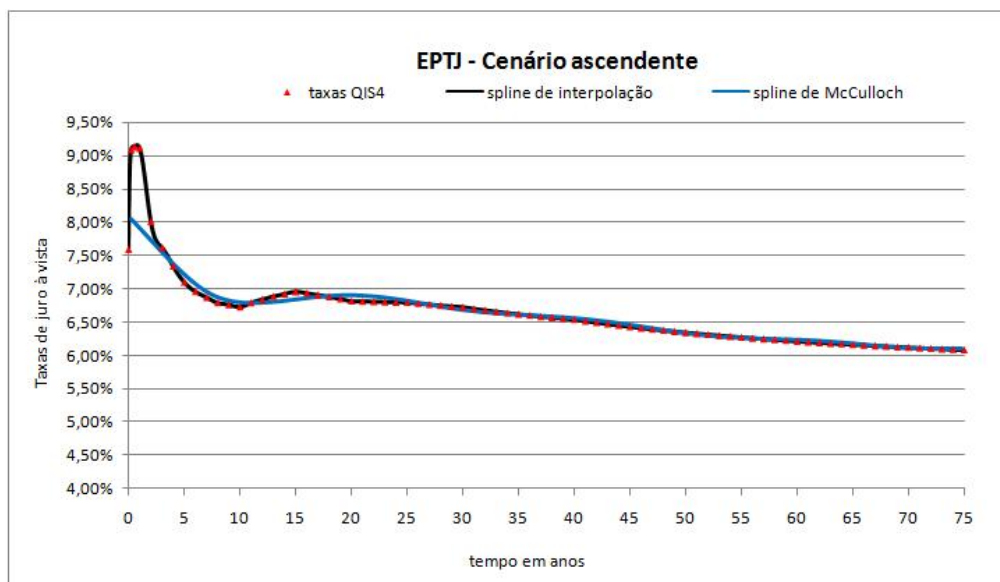


Figura 4.3 – *Clamped cubic spline* e *spline* de McCulloch no cenário ascendente

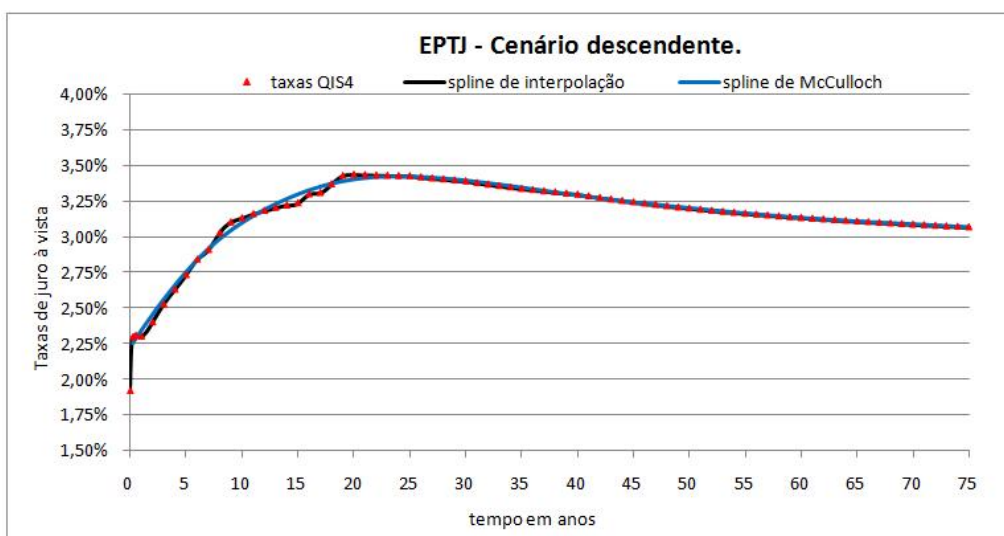


Figura 4.4 – *Natural cubic spline* e *spline* de McCulloch no cenário descendente

Os parâmetros das interpolações encontram-se no Anexo 3.

A inclusão *spline* de regressão de McCulloch permite mostrar que este é mais “suave” do que o *spline* de interpolação; no entanto, as diferenças entre uma estrutura e outra não são muito significativas para efeitos de actualização dos cash flows.

Para o passivo obtiveram-se os seguintes resultados:

| | | D _{FW} Convexidade | | | | | choque asc. | choque desc. |
|------------|--------------|-----------------------------|--------------|-----------|------------|--------------|----------------|----------------|
| | | | | | | | variação rel. | |
| | | | | | | | variação abs. | |
| | | | | | | | 5.597.607,69 € | 4.721.614,05 € |
| | | | | | | | 6.487.150,77 € | |
| Data | CF | t | EPTJ inicial | EPTJ asc. | EPTJ desc. | VP inicial | VP asc. | VP desc. |
| 30-06-2008 | 521.418,99 € | 0,50 | 4,7071% | 9,1318% | 2,3065% | 509.596,16 € | 499.186,92 € | 515.523,84 € |
| 30-06-2009 | 506.010,94 € | 1,50 | 4,6150% | 8,6270% | 2,3359% | 472.928,64 € | 446.994,84 € | 488.800,79 € |
| 30-06-2010 | 488.867,95 € | 2,50 | 4,4986% | 7,7204% | 2,4644% | 437.967,20 € | 405.966,81 € | 460.016,42 € |
| 30-06-2011 | 475.644,02 € | 3,50 | 4,5229% | 7,4964% | 2,5793% | 407.444,54 € | 369.357,33 € | 435.099,35 € |
| 30-06-2012 | 456.045,46 € | 4,50 | 4,5425% | 7,2092% | 2,6786% | 373.390,44 € | 333.367,59 € | 404.885,07 € |
| 30-06-2013 | 439.630,77 € | 5,50 | 4,5653% | 7,0210% | 2,7899% | 343.897,83 € | 302.668,43 € | 377.872,21 € |
| 30-06-2014 | 421.324,42 € | 6,50 | 4,5960% | 6,9158% | 2,8718% | 314.587,69 € | 272.775,72 € | 350.489,37 € |
| 30-06-2015 | 405.848,86 € | 7,50 | 4,6326% | 6,8292% | 2,9631% | 288.958,49 € | 247.257,99 € | 326.013,31 € |
| 30-06-2016 | 384.712,23 € | 8,50 | 4,6751% | 6,7767% | 3,0710% | 260.847,79 € | 220.277,30 € | 297.455,51 € |
| 30-06-2017 | 367.039,94 € | 9,50 | 4,7199% | 6,7426% | 3,1175% | 236.783,68 € | 197.419,31 € | 274.156,89 € |
| 30-06-2018 | 345.560,76 € | 10,50 | 4,7638% | 6,7568% | 3,1434% | 211.945,99 € | 173.881,24 € | 249.651,01 € |
| 30-06-2019 | 329.187,15 € | 11,50 | 4,8029% | 6,8221% | 3,1702% | 191.895,63 € | 154.070,79 € | 229.886,26 € |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : |

Tabela 4.5 – Cash flows actualizados do passivo, duração e convexidade

Assim, o valor presente, a duração de Fisher e Weil (F&W) e a convexidade do passivo são respectivamente:

$$L_0 = 5.597.607,69 \quad (4.1)$$

$$D_{FW} = 8,51 \quad (4.2)$$

$$C = 134,15 \quad (4.3)$$

Os valores de (4.1), (4.2) e (4.3) foram obtidos aplicando directamente as fórmulas (1.26) e (1.27), considerando $\alpha = 0,0001$.

No que diz respeito ao activo, é necessário definir uma estratégia de investimentos, tendo em conta as diversas possibilidades analisemos alguns exemplos.

Exemplo 1 : Diversificação do investimento

Considerando que o valor presente das obrigações a 31-12-2007 é igual ao valor presente do passivo e tendo como objectivo a máxima dispersão do investimento em cada OT, define-se o seguinte problema de minimização, onde p_i é a proporção investida em cada OT:

$$\text{Min}[p_i^2], \quad i = 1, 2, \dots, 10 \quad (4.4)$$

$$s.a: \quad A_0 = L_0; \quad \sum_{i=1}^{10} p_i = 1; \quad p_i \geq 0$$

Através da ferramenta *Solver* do Excel, obtém-se a seguinte solução:

| | | soma quadrado | var. rel | choque asc. | choque desc. | | |
|--------------------|------------|----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|
| | | 0,100000 | -11,42% | -639.286,68 € | 583.860,34 € | | |
| | | | var. absl. | | | | |
| Obrigações | | 100,00% | 5.597.607,69 € | 4.958.321,01 € | 6.181.468,02 € | 5,51 | 67,56 |
| Descrição | Quantidade | Peso | VP inicial | VP asc. | VP desc. | D_{FW} | Convex. |
| OT 5,375% Jun 2008 | 543.330 | 10,00% | 559.924,80 € | 548.952,65 € | 566.166,40 € | 0,46 | 0,64 |
| OT 3,95% Jul 2009 | 555.304 | 10,00% | 559.903,00 € | 529.437,11 € | 578.645,77 € | 1,44 | 3,47 |
| OT 5,85% Mai 2010 | 525.794 | 10,01% | 560.081,73 € | 522.681,13 € | 585.518,20 € | 2,13 | 6,80 |
| OT 5,15% Jun 2011 | 534.657 | 10,00% | 559.927,70 € | 511.467,40 € | 594.695,21 € | 3,04 | 12,68 |
| OT 5% Jun 2012 | 535.892 | 10,00% | 559.927,83 € | 504.979,89 € | 602.403,72 € | 3,84 | 19,46 |
| OT 5,45% Set 2013 | 529.368 | 10,00% | 559.925,43 € | 497.470,90 € | 610.685,82 € | 4,81 | 29,68 |
| OT 3,35% Out 2015 | 605.250 | 9,99% | 559.410,13 € | 484.066,74 € | 625.273,20 € | 6,59 | 53,20 |
| OT 4,35% Out 2017 | 570.729 | 10,00% | 559.833,00 € | 477.499,49 € | 636.523,64 € | 7,72 | 74,50 |
| OT 3,85% Abr 2021 | 599.472 | 10,00% | 559.513,83 € | 458.535,85 € | 660.099,15 € | 9,71 | 121,42 |
| OT 4,10% Abr 2037 | 616.518 | 9,99% | 559.160,23 € | 423.229,84 € | 721.456,90 € | 15,38 | 354,19 |

Tabela 4.6 – Estratégia de diversificação do investimento

Note que o *Solver* tende a devolver mínimos locais que dependem dos valores de partida. Se for permitida a venda a descoberto, facilmente se encontra o mínimo global para o problema através dos multiplicadores de Lagrange

Por exemplo, os resultados para a OT 5,45% Set 2013 são:

| | | | | | | | | |
|--------------|-------------------|------|-----------------------|--------------------|------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Quantidade | 529.368 | | | | | variação rel. | -11,15% | 9,07% |
| Maturidade | 23-09-2013 | | D_{FW} | Convexidade | | variação abs. | -62.454,53 € | 50.760,39 € |
| PTOTEGOE0009 | OT 5.45% Set 2013 | | 4,81 | 29,68 | | 559.925,43 € | 497.470,90 € | 610.685,82 € |
| Data | CF | t | EPTJ inicial | EPTJ asc. | EPTJ desc. | VP inicial | VP asc. | VP desc. |
| 23-09-2008 | 28.771,70 € | 0,73 | 4,7093% | 9,1500% | 2,3015% | 27.819,30 € | 26.986,77 € | 28.296,77 € |
| 23-09-2009 | 28.850,53 € | 1,73 | 4,5692% | 8,3209% | 2,3634% | 26.702,76 € | 25.121,72 € | 27.706,89 € |
| 23-09-2010 | 28.850,53 € | 2,73 | 4,5016% | 7,6671% | 2,4936% | 25.581,08 € | 23.578,67 € | 26.973,41 € |
| 23-09-2011 | 28.850,53 € | 3,73 | 4,5278% | 7,4254% | 2,6027% | 24.456,26 € | 22.084,01 € | 26.212,84 € |
| 24-09-2012 | 28.929,57 € | 4,74 | 4,5472% | 7,1555% | 2,7030% | 23.434,65 € | 20.852,81 € | 25.496,05 € |
| 23-09-2013 | 558.138,99 € | 5,73 | 4,5718% | 6,9908% | 2,8150% | 431.931,37 € | 378.846,93 € | 475.999,85 € |

Tabela 4.7 - Cash flows da OT 5,45% Set 2013 actualizados, duração e convexidade

A seguinte tabela ilustra as variações no valor líquido para cada cenário base.

| | Varição Activo | Varição Passivo | var. absl. | var. rel |
|---------------|----------------|-----------------|---------------|----------|
| Cenário asc. | -639.286,68 € | -875.993,63 € | 236.706,96 € | 4,23% |
| Cenário desc. | 583.860,34 € | 889.543,08 € | -305.682,75 € | -5,46% |

Tabela 4.8 – Variação líquida na estratégia de diversificação do investimento

Logo, a carga de capital seria de 305.683€

Como seria de esperar o cenário mais gravoso é o descendente, uma vez que a duração de F&W do passivo $D_{FW}(L)$ é bastante superior à duração de F&W do activo $D_{FW}(A)$.

Uma estratégia de imunização, em que se acrescenta a restrição $D_{FW}(A) = D_{FW}(L)$ ao problema (4.4) poderá diminuir significativamente a carga de capital.

Exemplo 2 : Imunização de F&W de 1º ordem

Tendo em conta as seguintes restrições,

$$\text{Min}[p_i^2], \quad i = 1, 2, \dots, 10 \quad (4.5)$$

$$s.a : A_0 = L_0; \quad D_{FW}(A) = D_{FW}(L); \quad \sum_{i=1}^{10} p_i = 1; \quad p_i \geq 0$$

obtém-se a seguinte estratégia de investimento

| | | soma quadrado | var. rel | -15,72% | 15,89% | | |
|--------------------|------------|---------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|---------|
| | | 0,152154 | var. absl. | -879.989,15 € | 889.303,72 € | | |
| Obrigações | | 100,00% | 5.597.607,69 € | 4.717.618,53 € | 6.486.911,40 € | 8,51 | 132,72 |
| Descrição | Quantidade | Peso | VP inicial | VP asc. | VP desc. | D _{FW} | Convex. |
| OT 5,375% Jun 2008 | 116.917 | 2,15% | 120.488,18 € | 118.127,13 € | 121.831,29 € | 0,46 | 0,64 |
| OT 3,95% Jul 2009 | 219.992 | 3,96% | 221.813,91 € | 209.744,40 € | 229.239,14 € | 1,44 | 3,47 |
| OT 5,85% Mai 2010 | 0 | 0,00% | 0,21 € | 0,20 € | 0,22 € | 2,13 | 6,80 |
| OT 5,15% Jun 2011 | 408.222 | 7,64% | 427.516,85 € | 390.516,37 € | 454.062,59 € | 3,04 | 12,68 |
| OT 5% Jun 2012 | 496.427 | 9,27% | 518.692,52 € | 467.791,16 € | 558.040,31 € | 3,84 | 19,46 |
| OT 5,45% Set 2013 | 403.396 | 7,62% | 426.682,13 € | 379.089,66 € | 465.363,27 € | 4,81 | 29,68 |
| OT 3,35% Out 2015 | 711.417 | 11,75% | 657.536,43 € | 568.977,03 € | 734.952,56 € | 6,59 | 53,20 |
| OT 4,35% Out 2017 | 873.391 | 15,31% | 856.717,10 € | 730.721,45 € | 974.077,42 € | 7,72 | 74,50 |
| OT 3,85% Abr 2021 | 1.029.695 | 17,17% | 961.060,44 € | 787.613,55 € | 1.133.832,89 € | 9,71 | 121,42 |
| OT 4,10% Abr 2037 | 1.551.438 | 25,14% | 1.407.099,91 € | 1.065.037,59 € | 1.815.511,70 € | 15,38 | 354,19 |

Tabela 4.9 – Estratégia de imunização de F&W

Logo, tem-se que

| | Varição Activo | Varição Passivo | Var. absl. | Var. rel |
|---------------|----------------|-----------------|-------------|----------|
| Cenário asc. | -879.989,15 € | -875.993,63 € | -3.995,52 € | -0,07% |
| Cenário desc. | 889.303,72 € | 889.543,08 € | -239,36 € | 0,00% |

Tabela 4.10 – Variação líquida na estratégia de imunização de F&W

Nesta estratégia, a carga de capital seria menos de 4.000€

A simetria relativa dos cenários implica que, à medida que um cenário se torna menos volátil para a carteira, o outro também tende a ser menos volátil.

Uma vez que os choques são também relativamente simétricos, pode tentar compor-se uma carteira em que a convexidade do activo $C(A)$ seja superior à convexidade do passivo $C(L)$.

Exemplo 3 : Imunizar com $C(A) \geq C(L)$

Tendo em conta o seguinte problema de minimização,

$$\begin{aligned} & \text{Min} [p_i^2], \quad i = 1, 2, \dots, 10 & (4.6) \\ & \text{s.a: } A_0 = L_0; D_{FW}(A) = D_{FW}(L); C(A) \geq C(L); \sum_{i=1}^{10} p_i = 1; p_i \geq 0 \end{aligned}$$

obtém-se a seguinte estratégia de investimento

| | | soma quadrado | var. rel | -15,42% | 15,92% | | |
|--------------------|------------|---------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|---------|
| | | 0,169874 | var. absl. | -863.221,94 € | 891.209,55 € | | |
| Obrigações | | 100,00% | 5.597.607,69 € | 4.734.385,75 € | 6.488.817,24 € | 8,51 | 141,93 |
| Descrição | Quantidade | Peso | VP inicial | VP asc. | VP desc. | D _{FW} | Convex. |
| OT 5,375% Jun 2008 | 459.376 | 8,46% | 473.406,42 € | 464.129,66 € | 478.683,58 € | 0,46 | 0,64 |
| OT 3,95% Jul 2009 | 487.362 | 8,78% | 491.398,71 € | 464.660,33 € | 507.848,29 € | 1,44 | 3,47 |
| OT 5,85% Mai 2010 | 0 | 0,00% | 0,00 € | 0,00 € | 0,00 € | 2,13 | 6,80 |
| OT 5,15% Jun 2011 | 77.709 | 1,45% | 81.381,64 € | 74.338,27 € | 86.434,86 € | 3,04 | 12,68 |
| OT 5% Jun 2012 | 537.536 | 10,03% | 561.644,70 € | 506.528,28 € | 604.250,83 € | 3,84 | 19,46 |
| OT 5,45% Set 2013 | 0 | 0,00% | 0,00 € | 0,00 € | 0,00 € | 0,00 | 0,00 |
| OT 3,35% Out 2015 | 732.983 | 12,10% | 677.469,08 € | 586.225,08 € | 757.232,01 € | 6,59 | 53,20 |
| OT 4,35% Out 2017 | 788.521 | 13,82% | 773.467,29 € | 659.715,02 € | 879.423,35 € | 7,72 | 74,50 |
| OT 3,85% Abr 2021 | 977.517 | 16,30% | 912.359,72 € | 747.702,06 € | 1.076.377,11 € | 9,71 | 121,42 |
| OT 4,10% Abr 2037 | 1.793.322 | 29,06% | 1.626.480,13 € | 1.231.087,05 € | 2.098.567,20 € | 15,38 | 354,19 |

Tabela 4.11 – Estratégia de imunização com $C(A) \geq C(L)$

Os efeitos líquidos na carteira são:

| | Varição Activo | Varição Passivo | Var. absl. | Var. rel. |
|----------------------|----------------|-----------------|-------------|-----------|
| <i>Cenário asc.</i> | -863.221,94 € | -875.993,63 € | 12.771,69 € | 0,23% |
| <i>Cenário desc.</i> | 891.209,55 € | 889.543,08 € | 1.666,47 € | 0,03% |

Tabela 4.12 – Variação líquida na estratégia de imunização com $C(A) \geq C(L)$

Ambos os cenários implicam uma variação positiva no valor líquido; logo, nesta situação não seria necessária qualquer carga adicional.

Na prática, nem todos os activos que estão a representar as provisões técnicas são títulos de rendimento fixo (ou derivados de taxa de juro), logo, o valor do activo a incluir no exercício é normalmente inferior ao do passivo; deste modo, consideremos o caso em que $A_0 < L_0$.

Exemplo 4 : Imunização com $A_0 < L_0$

Para efeitos de ilustração considere-se que

$$A_0 = 0,75L_0 \quad (4.7)$$

Formalizando o problema, vem

$$\text{Min}[p_i^2], \quad i = 1, 2, \dots, 10 \quad (4.8)$$

$$s.a: \quad A_0 = 0,75L_0 = 4.198.205,76; \quad D_{FW}(A) = \frac{L_0}{A_0} D_{FW}(L) = 11,35; \quad \sum_{i=1}^{10} p_i = 1; \quad p_i \geq 0$$

o que origina a seguinte estratégia de investimento

| | | soma quadrado | var. rel | -19,49% | 21,08% | | |
|--------------------|------------|---------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|---------|
| | | 0,299112 | var. absl. | -818.437,73 € | 884.923,24 € | | |
| Obrigações | | 100,00% | 4.198.205,76 € | 3.379.768,04 € | 5.083.129,01 € | 11,35 | 203,20 |
| Descrição | Quantidade | Peso | VP inicial | VP asc. | VP desc. | D _{FW} | Convex. |
| OT 5,375% Jun 2008 | 0 | 0,00% | 0,20 € | 0,19 € | 0,20 € | 0,46 | 0,64 |
| OT 3,95% Jul 2009 | 0 | 0,00% | 0,19 € | 0,18 € | 0,20 € | 1,44 | 3,47 |
| OT 5,85% Mai 2010 | 0 | 0,00% | 0,21 € | 0,20 € | 0,22 € | 2,13 | 6,80 |
| OT 5,15% Jun 2011 | 0 | 0,00% | 0,21 € | 0,19 € | 0,22 € | 3,04 | 12,68 |
| OT 5% Jun 2012 | 0 | 0,00% | 0,20 € | 0,18 € | 0,22 € | 3,84 | 19,46 |
| OT 5,45% Set 2013 | 0 | 0,00% | 0,21 € | 0,19 € | 0,23 € | 4,81 | 29,68 |
| OT 3,35% Out 2015 | 656.387 | 14,45% | 606.673,75 € | 524.964,72 € | 678.101,48 € | 6,59 | 53,20 |
| OT 4,35% Out 2017 | 733.475 | 17,14% | 719.471,65 € | 613.660,41 € | 818.030,94 € | 7,72 | 74,50 |
| OT 3,85% Abr 2021 | 1.150.970 | 25,59% | 1.074.251,15 € | 880.376,22 € | 1.267.372,20 € | 9,71 | 121,42 |
| OT 4,10% Abr 2037 | 1.982.224 | 42,82% | 1.797.807,99 € | 1.360.765,55 € | 2.319.623,10 € | 15,38 | 354,19 |

Tabela 4.13 – Estratégia de imunização com $A_0 < L_0$

| | Varição Activo | Varição Passivo | Var. absl. | Var. rel |
|---------------|----------------|-----------------|-------------|----------|
| Cenário asc. | -818.437,73 € | -875.993,63 € | 57.555,90 € | 1,37% |
| Cenário desc. | 884.923,24 € | 889.543,08 € | -4.619,84 € | -0,11% |

Tabela 4.14 – Variação líquida na estratégia de imunização com $A_0 < L_0$

Agora, a carga de capital seria apenas de 0,11% do valor total dos activos de rendimento fixo. No entanto, a estratégia apresenta um elevado nível de concentração em títulos de longo prazo (o que seria de esperar, dado que se pretende obter uma duração mais elevada).

Se não fosse considerada a restrição $D_{FW}(A) = 11,35$ a carga de capital seria superior a 450.000€ ou seja, bastante elevada.

4.5 Exercício de risco de taxa de juro no modelo de duração direccional

Recorrendo ao modelo de duração direccional de Reitano, será testada a capacidade de previsão dos parâmetros do modelo face aos cenários propostos pelo QIS4.

De seguida, vai obter-se o vector de direcção colinear ao vector de duração total das estratégias de imunização definidas anteriormente, com o objectivo de se avaliar o seu impacto nas mesmas, tendo em conta se os novos cenários representam ou não uma EPTJ credível.

4.5.1 Definição do vector de direcção

Para as taxas chave (*key rates*) do vector de direcção consideram-se as maturidades da EPTJ da tabela 4.1. Os elementos do vector de direcção para os restantes prazos serão obtidos por interpolação linear.

Uma vez definido o método de interpolação, define-se o valor de Δi que corresponderá ao cenário ascendente e ao cenário descendente.

Para esse efeito, definimos

$$\Delta i = 0,01 \quad (4.9)$$

A escolha deve-se ao facto de que com $\Delta i = 0,01$ a duração direccional é consistente com a definição de duração modificada, isto é, que a duração representa aproximadamente a variação percentual no valor de uma obrigação (de cupão fixo) se a EPTJ sofrer um choque de 100 pontos base.

Por fim, falta definir-se os vectores de direcção para cada cenário.

Relembrando, tem-se que $\vec{i}_0 = (i_{0,1}, i_{0,2}, \dots, i_{0,m})$ é o vector das taxas no momento inicial para os diversos prazos e $\vec{i}_0 + \Delta i \vec{N} = (i_{0,1} + \Delta i \times n_1, i_{0,2} + \Delta i \times n_2, \dots, i_{0,75} + \Delta i \times n_m)$ é a nova EPTJ - após o choque de intensidade Δi na direcção de \vec{N} , com $\vec{N} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$.

Logo, se $i_{0,t}^*$ representar a nova taxa resultante de um choque instantâneo no momento zero para a maturidade t e n_t o respectivo elemento do vector de direcção \vec{N} , vem que

$$n_t = \frac{(i_{0,t}^* - i_{0,t})}{\Delta i}. \quad (4.10)$$

Dada a expressão anterior e tendo em conta (4.9) obtêm-se os vectores de direcção para ambos os cenários, veja-se o Anexo 4. Embora os restantes elementos do vector direcção sejam obtidos por interpolação linear, pressupõe-se que a EPTJ inicial é dada pelo *spline* cúbico da tabela 4.

4.5.2 Duração e convexidade direcional da carteira

As durações e convexidades direccionais resultantes do passivo encontram-se na tabela 4.15.

Note ainda que

$$\text{Aprox. } 1^\circ = -\Delta i \times D_{\vec{N}}(\vec{i}_0),$$

$$\text{Aprox. } 2^\circ = -\Delta i \times D_{\vec{N}}(\vec{i}_0) + 1/2 (C_{\vec{N}}(\vec{i}_0)) \Delta i^2 \text{ e}$$

$$\text{Aprox. log. } 2^\circ = e^{-D_{\vec{N}}(\vec{i}_0) \Delta i + \frac{1}{2} [C_{\vec{N}}(\vec{i}_0) - D_{\vec{N}}^2(\vec{i}_0)] (\Delta i)^2} - 1,$$

$$\text{com } \sum_{t=1}^{75} \sum_{k=1}^{75} n_t n_k \left. \frac{\partial^2 P(\vec{i})}{\partial i_t \partial i_k} \right|_{i_t=i_{0t}, i_k=i_{0k}} = 0, \forall t \neq k.$$

Ou seja, as raízes características da matriz convexidade são dadas pelos elementos da diagonal principal e os vectores característicos unitários associados às mesmas são dados por e_j (vector onde o elemento da j – ésima linha é 1 e os restantes elementos são 0).

As durações e convexidades direccionais dos títulos para o cenário ascendente e descendente estão apresentadas nas tabelas 4.15 e 4.16, respectivamente. Como se pode verificar, os parâmetros do modelo originam estimativas bastante próximas da situação real, sobretudo se se tiver em conta a aproximação de segunda ordem do logaritmo da função-preço.

| D(desc.) _{cauchy} = N _{desc.} * VDT = 17,62 | | | | | | | | | | | |
|------------------------------------------------------------------------|--------------|---------|---------------|----------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------------------------|--------------------|----------------|
| D(asc.) _{cauchy} = N _{asc.} * VDT = 23,05 | | | | | | | | | | | |
| D _N (desc.) | | -14,00 | Aprox. 1º | 14,00% | Aprox. log.2º | PASSIVO | | | N _{asc.} | N _{desc.} | |
| C _N (desc.) | | 338,66 | Aprox. 2º | 15,698% | 15,856% | variação rel. | -15,664% | 15,898% | 14,911 | 11,400 | |
| D _N (asc.) | | 17,97 | Aprox. 1º | -17,970% | Aprox. log.2º | variação absl. | -876.800,22 € | 889.882,33 € | VDT | 1,55 | N ₀ |
| C _N (asc.) | | 519,722 | Aprox. 2º | -15,371% | -15,622% | 5.597.607,69 € | 4.720.807,47 € | 6.487.490,02 € | Soma (VDT)=D _{FW} =8,51 | 134,150 | 1,00 |
| Data | CF | t | Taxa s/choque | N asc. | N desc. | VP inicial | VP asc. | VP desc. | Vect. de dur. total | Convex. | No |
| 30-06-2008 | 521.418,99 € | 0,499 | 4,7071% | 4,4246 | -2,401 | 509.596,16 € | 499.187,16 € | 515.523,83 € | 0,043 | 0,062 | 0,028 |
| 30-06-2009 | 506.010,94 € | 1,499 | 4,6150% | 3,9510 | -2,262 | 472.928,64 € | 447.371,05 € | 488.674,40 € | 0,121 | 0,289 | 0,078 |
| 30-06-2010 | 488.867,95 € | 2,499 | 4,4986% | 3,2990 | -2,056 | 437.967,20 € | 405.241,39 € | 460.261,35 € | 0,187 | 0,626 | 0,121 |
| 30-06-2011 | 475.644,02 € | 3,499 | 4,5229% | 2,9615 | -1,944 | 407.444,54 € | 369.501,45 € | 435.107,91 € | 0,244 | 1,049 | 0,158 |
| 30-06-2012 | 456.045,46 € | 4,501 | 4,5425% | 2,6797 | -1,862 | 373.390,44 € | 333.184,71 € | 404.858,81 € | 0,287 | 1,511 | 0,186 |
| 30-06-2013 | 439.630,77 € | 5,501 | 4,5653% | 2,4653 | -1,781 | 343.897,83 € | 302.519,52 € | 377.976,76 € | 0,323 | 2,010 | 0,209 |
| 30-06-2014 | 421.324,42 € | 6,501 | 4,5960% | 2,3209 | -1,724 | 314.587,69 € | 272.756,58 € | 350.475,48 € | 0,349 | 2,505 | 0,226 |
| 30-06-2015 | 405.848,86 € | 7,501 | 4,6326% | 2,2003 | -1,668 | 288.958,49 € | 247.193,34 € | 325.970,09 € | 0,370 | 3,007 | 0,239 |
| 30-06-2016 | 384.712,23 € | 8,504 | 4,6751% | 2,1033 | -1,613 | 260.847,79 € | 220.247,52 € | 297.667,58 € | 0,379 | 3,437 | 0,245 |
| 30-06-2017 | 367.039,94 € | 9,504 | 4,7199% | 2,0289 | -1,605 | 236.783,68 € | 197.308,71 € | 274.215,97 € | 0,384 | 3,851 | 0,248 |
| 30-06-2018 | 345.560,76 € | 10,504 | 4,7638% | 2,0005 | -1,619 | 211.945,99 € | 173.753,90 € | 249.629,05 € | 0,380 | 4,169 | 0,246 |
| 30-06-2019 | 329.187,15 € | 11,504 | 4,8029% | 2,0169 | -1,633 | 191.895,63 € | 154.109,40 € | 229.886,25 € | 0,376 | 4,490 | 0,243 |
| 30-06-2020 | 313.252,79 € | 12,507 | 4,8360% | 2,0309 | -1,644 | 173.530,41 € | 136.508,28 € | 211.461,32 € | 0,370 | 4,765 | 0,239 |
| 30-06-2021 | 297.713,21 € | 13,507 | 4,8648% | 2,0430 | -1,654 | 156.730,60 € | 120.773,07 € | 194.269,97 € | 0,361 | 4,989 | 0,233 |
| 30-06-2022 | 281.446,01 € | 14,507 | 4,8897% | 2,0535 | -1,662 | 140.808,28 € | 106.286,46 € | 177.531,83 € | 0,348 | 5,143 | 0,225 |
| 30-06-2023 | 267.438,58 € | 15,507 | 4,9107% | 2,0374 | -1,645 | 127.167,59 € | 94.372,39 € | 162.473,11 € | 0,336 | 5,284 | 0,217 |
| 30-06-2024 | 252.255,44 € | 16,510 | 4,9284% | 1,9954 | -1,626 | 113.999,41 € | 83.527,79 € | 147.537,71 € | 0,320 | 5,347 | 0,207 |
| 30-06-2025 | 239.136,75 € | 17,510 | 4,9444% | 1,9524 | -1,606 | 102.720,67 € | 74.385,01 € | 134.571,33 € | 0,306 | 5,400 | 0,198 |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : |

Tabela 4.15 – Duração, Convexidade e aproximações no modelo direccional do passivo

| Descrição | VP inicial | VP asc. | VP desc. | Δi 1,00% | | Cenário ascendente | | | |
|--------------------|------------|-----------|-----------|----------------------|----------------------|--------------------|----------|-------------|-----------|
| | | | | D _{N(asc.)} | C _{N(asc.)} | Aprox.1º | Aprox.2º | Aprox. log. | var. real |
| OT 5,375% Jun 2008 | 103.048 € | 101.024 € | 104.200 € | 2,025 | 12,657 | -2,025% | -1,962% | -1,963% | -1,964% |
| OT 3.95% Jul 2009 | 100.828 € | 95.412 € | 104.179 € | 5,627 | 53,193 | -5,627% | -5,361% | -5,370% | -5,372% |
| OT 5.85% Mai 2010 | 106.521 € | 99.254 € | 111.409 € | 7,190 | 76,966 | -7,190% | -6,805% | -6,820% | -6,822% |
| OT 5.15% Jun 2011 | 104.726 € | 95.692 € | 111.232 € | 9,170 | 114,249 | -9,170% | -8,598% | -8,624% | -8,626% |
| OT 5% Jun 2012 | 104.485 € | 94.188 € | 112.407 € | 10,540 | 144,648 | -10,540% | -9,817% | -9,853% | -9,855% |
| OT 5.45% Set 2013 | 105.773 € | 93.943 € | 115.387 € | 12,042 | 181,776 | -12,042% | -11,133% | -11,182% | -11,184% |
| OT 3.35% Out 2015 | 92.426 € | 79.959 € | 103.312 € | 14,699 | 258,321 | -14,699% | -13,407% | -13,487% | -13,489% |
| OT 4.35% Out 2017 | 98.091 € | 83.631 € | 111.538 € | 16,214 | 316,207 | -16,214% | -14,633% | -14,741% | -14,742% |
| OT 3.85% Abr 2021 | 93.334 € | 76.482 € | 110.123 € | 20,421 | 518,523 | -20,421% | -17,829% | -18,056% | -18,056% |
| OT 4.10% Abr 2037 | 90.696 € | 68.643 € | 117.022 € | 29,600 | 1230,000 | -29,600% | -23,450% | -24,294% | -24,316% |

Tabela 4.16 – Duração, convexidade e aproximações no modelo direccional do activo para o cenário ascendente

| Descrição | VP inicial | VP asc. | VP desc. | Δi 1,00% | | Cenário descendente | | | |
|--------------------|------------|-----------|-----------|-----------------------|-----------------------|---------------------|----------|-------------|-----------|
| | | | | D _{N(desc.)} | C _{N(desc.)} | Aprox.1º | Aprox.2º | Aprox. log. | var. real |
| OT 5,375% Jun 2008 | 103.048 € | 101.024 € | 104.200 € | -1,099 | 3,726 | 1,099% | 1,117% | 1,118% | 1,118% |
| OT 3.95% Jul 2009 | 100.828 € | 95.412 € | 104.179 € | -3,233 | 17,576 | 3,233% | 3,321% | 3,323% | 3,324% |
| OT 5.85% Mai 2010 | 106.521 € | 99.254 € | 111.409 € | -4,437 | 29,392 | 4,437% | 4,584% | 4,588% | 4,588% |
| OT 5.15% Jun 2011 | 104.726 € | 95.692 € | 111.232 € | -5,961 | 48,510 | 5,961% | 6,204% | 6,211% | 6,212% |
| OT 5% Jun 2012 | 104.485 € | 94.188 € | 112.407 € | -7,226 | 68,486 | 7,226% | 7,568% | 7,581% | 7,582% |
| OT 5.45% Set 2013 | 105.773 € | 93.943 € | 115.387 € | -8,601 | 93,775 | 8,601% | 9,069% | 9,089% | 9,090% |
| OT 3.35% Out 2015 | 92.426 € | 79.959 € | 103.312 € | -11,007 | 146,457 | 11,007% | 11,739% | 11,777% | 11,777% |
| OT 4.35% Out 2017 | 98.091 € | 83.631 € | 111.538 € | -12,664 | 196,798 | 12,664% | 13,648% | 13,708% | 13,709% |
| OT 3.85% Abr 2021 | 93.334 € | 76.482 € | 110.123 € | -16,187 | 332,952 | 16,187% | 17,851% | 17,988% | 17,987% |
| OT 4.10% Abr 2037 | 90.696 € | 68.643 € | 117.022 € | -24,161 | 845,790 | 24,161% | 28,390% | 29,009% | 29,026% |

Tabela 4.17 – Duração, convexidade e aproximações no modelo direccional do activo para o cenário descendente

4.5.3 Estratégia de imunização no modelo de duração direccional

Se os cenários propostos corresponderem à versão final do modelo standard para o risco de taxa de juro (note que os cenários do QIS4, tabela 4.2, são os mesmos do QIS3), então, é possível definir as respectivas durações direccionais da carteira.

Embora não se conheça à partida exactamente qual será a estrutura que virá a ser utilizada para o exercício, desde que não haja grandes diferenças entre esta e a EPTJ usada na determinação da estratégia, as diferenças nos resultados não serão materiais.

Portanto, se se pretender minimizar a carga de capital para o rico de taxa de juro poder-se-á adoptar a seguinte estratégia de investimento, pressupondo, tal como se fez anteriormente, que $A_0 = 0,75L_0$.

Exemplo 5 : Modelo de duração direccional

Dado que o cenário que tende a ser mais gravoso é o cenário de descidas das taxas de juro (pois o valor do activo é significativamente inferior ao valor do passivo), definem-se as seguintes restrições,

$$A_0 = 0,75L_0; \quad D_{\bar{N}_{(desc.)}}(A) = \frac{D_{\bar{N}_{(desc.)}}(L)}{0,75}; \quad \sum_{j=1}^{10} p_j = 1; \quad p_i \geq 0 \quad (4.11)$$

A estratégia do exemplo 5 resulta na seguinte composição do investimento:

| Descrição | Quantidade | soma quadrado | | | | | | | | |
|--------------------|------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|--|
| | | Peso | VP inicial | VP asc. | VP desc. | D _{N(asc.)} | C _{N(asc.)} | D _{N(desc.)} | C _{N(desc.)} | |
| | | 0,319 | 4.198.206 € | 3.365.610 € | 5.108.802 € | 23,302 | 793,396 | -18,673 | 532,784 | |
| OT 5,375% Jun 2008 | 0 | 0,00% | 0,00 € | 0,00 € | 0,00 € | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | |
| OT 3,95% Jul 2009 | 0 | 0,00% | 0,00 € | 0,00 € | 0,00 € | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | |
| OT 5,85% Mai 2010 | 0 | 0,00% | 0,00 € | 0,00 € | 0,00 € | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | |
| OT 5,15% Jun 2011 | 0 | 0,00% | 0,00 € | 0,00 € | 0,00 € | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | |
| OT 5% Jun 2012 | 0 | 0,00% | 0,00 € | 0,00 € | 0,00 € | 10,540 | 144,648 | -7,226 | 68,487 | |
| OT 5,45% Set 2013 | 226.753 | 5,71% | 239.842,85 € | 213.018,95 € | 261.644,80 € | 12,042 | 181,776 | -8,601 | 93,775 | |
| OT 3,35% Out 2015 | 389.874 | 8,58% | 360.345,86 € | 311.740,27 € | 402.785,07 € | 14,699 | 258,321 | -11,007 | 146,457 | |
| OT 4,35% Out 2017 | 622.459 | 14,54% | 610.575,84 € | 520.567,20 € | 694.278,05 € | 16,214 | 316,207 | -12,664 | 196,798 | |
| OT 3,85% Abr 2021 | 1.014.173 | 22,55% | 946.572,60 € | 775.662,91 € | 1.116.836,28 € | 20,421 | 518,523 | -16,187 | 332,952 | |
| OT 4,10% Abr 2037 | 2.250.218 | 48,61% | 2.040.868,61 € | 1.544.620,80 € | 2.633.258,05 € | 29,600 | 1230,000 | -24,161 | 845,790 | |

Tabela 4.18 – Estratégia de imunização no modelo direccional

Logo,

| | Varição Activo | Varição Passivo | Diferença | var. rel. |
|---------------|----------------|-----------------|-----------|-----------|
| Cenário asc. | -832.595,62 € | -876.800,22 € | 44.205 € | 1,05% |
| Cenário desc. | 910.596,50 € | 889.882,33 € | 20.714 € | 0,49% |

Tabela 4.19 – Variação líquida na estratégia de imunização direccional

4.5.4 Vector colinear da carteira (\vec{N}_0) dos exemplos 2, 3 e 4

Relembrando que $\vec{N}_0 = \vec{D}(i_0) / \|\vec{D}(i_0)\|$ obter-se-á o vector colinear das estratégias dos exemplos 2, 3 e 4 para que seja avaliado o seu impacto nas mesmas.

Para efeitos de simplificação, os cash flows serão agregados para as maturidades chave mais próximas.

No que diz respeito ao passivo, assume-se que os pagamentos ocorrem no fim de cada ano; no entanto, de modo a considerar cash flows durante o ano de 2008, o primeiro pagamento será repartido de igual modo entre a maturidade $t = 0,5$ e $t = 1$.

Os vectores colineares unitários das estratégias 2, 3 e 4 encontram-se no Anexo 5.

Os elementos destes vectores serão positivos (negativos) quando a diferença entre o activo e passivo, para uma dada maturidade, for positiva (negativa).

Para cada estratégia serão testados os vectores colineares de norma 1 e de norma 11,815 (a norma do vector de direcção do cenário descendente, considerando que o primeiro elemento é nulo) e $\Delta i = 0,01$.

A seguinte tabela resume os resultados obtidos

| | Variação líquida da carteira | | | |
|--------------|------------------------------|---------------|----------------------|-----------------------------------|
| | Cenário asc. | Cenário desc. | $\ \vec{N}_0\ = 1$ | $11,815 \times \ \vec{N}_0\ = 1$ |
| Estratégia 2 | -3.995,52 € | -239,36 € | -87.813,29 € | -725.440,78 € |
| Estratégia 3 | 12.771,69 € | 1.666,47 € | -94.589,18 € | -726.584,73 € |
| Estratégia 4 | 57.555,90 € | -4.619,84 € | -124.465,76 € | -776.880,12 € |

Tabela 4.20 – Efeitos na variação líquida dos vectores colineares (exemplos 2, 3 e 4)

Uma carteira que aparentemente estaria imunizada sofre uma forte desvalorização se os choques forem de natureza paralela ao vector de duração total.

Falta, no entanto, avaliar se as novas taxas representam uma estrutura credível, uma vez que o modelo considera que as taxas chave se podem movimentar de forma independente e o método de interpolação das restantes taxas é perfeitamente flexível.

Considere-se a EPTJ obtida pelo vector de direcção $11,815 \times \|\vec{N}_0\|$ da estratégia do exemplo 2:

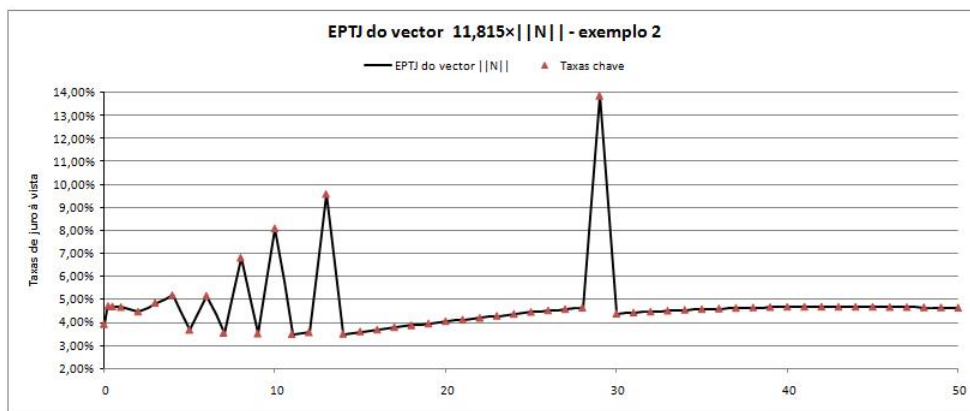


Figura 4.5 – EPTJ do vector colinear de direcção de norma 11,815 do exemplo 2

Estruturas desta natureza serão altamente improváveis e portanto não devem ser consideradas num processo de imunização. No entanto, é importante que se tenha em conta que para além da dimensão do choque, a direcção é um elemento determinante para se avaliar a exposição de uma determinada carteira ao risco de taxa de juro.

4.6 Modelo vector de durações (sob a hipótese do modelo de Svensson)

Para se estimar a variação percentual instantânea, é necessário atribuir uma forma funcional às estruturas propostas no QIS4, veja-se (2.15). Para esse efeito, optou-se pelo

modelo Svensson (MS) pois este é suficientemente flexível para se ajustar a uma dada estrutura e ao mesmo tempo é facilmente implementado.

4.6.1 Análise dos cenários propostos pelo QIS4

Para se aplicar o modelo vector de durações é necessário converter as taxas iniciais de capitalização discreta para taxas de capitalização contínua, tendo em conta a relação: $i_t^* = \ln(1+i_t)$, em que i_t^* é a taxa de capitalização contínua e i_t a taxa de capitalização discreta.

Recorde-se que a forma funcional das taxas de juro à vista do MS é dada pela expressão

$$y^{sv}(t) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{\alpha}{t} (1 - e^{-t/\alpha}) - \beta_2 e^{-t/\alpha} + \frac{\beta_3}{\alpha} \left[-\lambda e^{-t/\lambda} + \frac{\lambda^2}{t} (1 - e^{-t/\lambda}) \right] \quad (4.12)$$

Introduzindo-se o seguinte problema de minimização na ferramenta *Solver* do Excel

$$\text{Min}_{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha, \lambda} \sum_{t=0,25}^{75} \varepsilon_t^2,$$

$$\text{s.a. } \beta_0 > 0; \quad \beta_0 + \beta_1 > 0; \quad \alpha > 0$$

em que ε_t é a diferença entre a taxa proposta pelo QIS4 e a taxa obtida pela expressão (4.12), obtiveram-se os seguintes parâmetros para o cenário inicial, ascendente e descendente.

| EPTJ inicial | | EPTJ asc. | | EPTJ desc. | |
|---------------------|-----------|---------------------|-----------|---------------------|-----------|
| B ₀ | 0,039104 | B ₀ | 0,053622 | B ₀ | 0,026957 |
| B ₁ | 0,006316 | B ₁ | 0,035705 | B ₁ | -0,005167 |
| B ₂ | 0,542146 | B ₂ | 0,486907 | B ₂ | 0,332129 |
| α | 6,966302 | α | 6,408074 | α | 7,323233 |
| B ₃ | -0,525171 | B ₃ | -0,503103 | B ₃ | -0,307515 |
| λ | 6,665464 | λ | 5,853419 | λ | 7,019055 |
| 100×Σξ _t | 0,521035 | 100×Σξ _t | 2,908401 | 100×Σξ _t | 0,111572 |

Tabela 4.21 – Parâmetros do MS para o cenário inicial, ascendente e descendente

Graficamente, vem

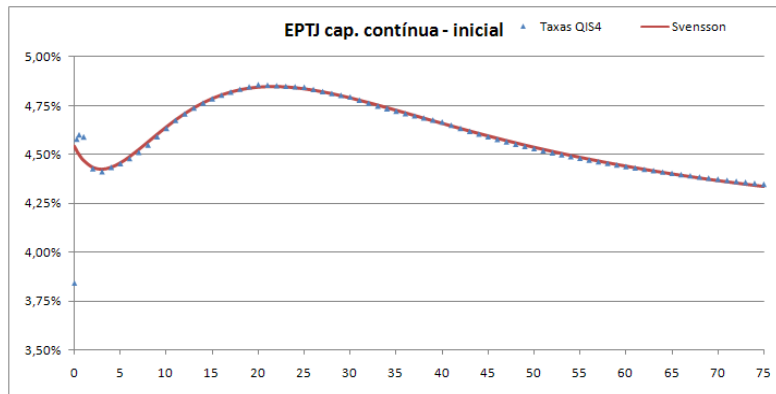


Figura 4.6 - EPTJ do cenário inicial no MS

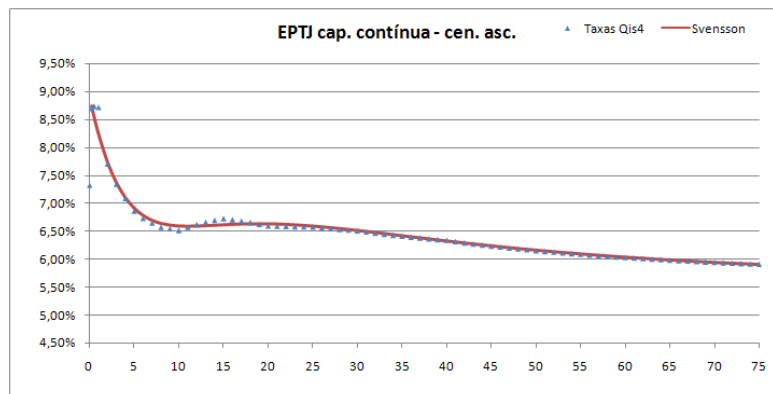


Figura 4.7 - EPTJ do cenário ascendente no MS

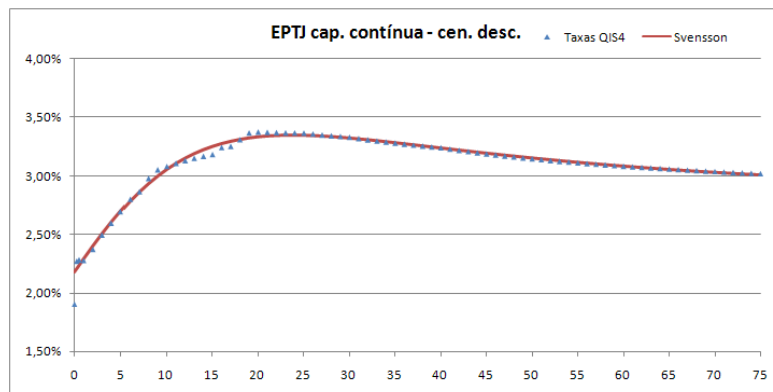


Figura 4.8 - EPTJ do cenário descendente no MS

O impacto dos cenários e as durações de ordens superiores para o passivo encontram-se na tabela 4.22 e 4.23 respectivamente. Os valores presentes para cada cenário não

diferem muito dos obtidos através da interpolação cúbica o que mostra a capacidade de ajustamento da forma funcional atribuída à EPTJ.

| VP inicial | VP cen. asc. | VP cen. desc. |
|----------------|----------------|----------------|
| 5.597.459,20 € | 4.721.031,32 € | 6.487.309,82 € |
| Variação absl. | -876.427,87 € | 889.850,63 € |
| Variação rel. | -15,66% | 15,90% |

Tabela 4.22 – Impacto no passivo do cenário inicial, ascendente e descendente no MS

| $D_i(1)$ | $D_i(2)$ | $D_i(3)$ | $D_i(4)$ | $D_i(5)$ |
|------------|---------------|----------------|-------------------|--------------------|
| 8,921 | 138,67 | 2.864 | 70.570 | 1.963.487 |
| $D_i(6)$ | $D_i(7)$ | $D_i(8)$ | $D_i(9)$ | $D_i(10)$ |
| 59.732.705 | 1.946.114.426 | 66.941.842.047 | 2.406.087.997.558 | 89.668.299.525.489 |

Tabela 4.23 - Duração de ordens superiores do passivo no MS

Recorde-se que as durações de ordem superior são dadas pela expressão (2.16), e portanto não dependem de uma forma funcional para a EPTJ.

4.6.2 Qualidade da aproximação aos choques no modelo vector de durações

Tal como no modelo direccionado, iremos testar a qualidade de previsão dos parâmetros do modelo vector de durações para o cenário ascendente e para o cenário descendente.

Deste modo, é necessário calcular o vector dos choques tendo em conta a forma funcional das taxas futuras no MS. Para esse efeito, utilizou-se um software específico (Mathematica versão 5.2) para se obter a expansão até à décima ordem do qual se obteve os seguintes vectores:

| Y | Cen. asc | Cen. Desc. |
|-----------------|-------------|--------------|
| Y ₁ | -4,3908E-02 | 2,3630E-02 |
| Y ₂ | 7,7972E-03 | -0,001780538 |
| Y ₃ | -1,1631E-03 | 0,000191388 |
| Y ₄ | 1,3329E-04 | -9,91763E-06 |
| Y ₅ | -1,4256E-05 | 7,68984E-08 |
| Y ₆ | 1,5286E-06 | 3,43283E-08 |
| Y ₇ | -1,6074E-07 | -3,56401E-09 |
| Y ₈ | 1,6287E-08 | 2,05094E-10 |
| Y ₉ | -1,5998E-09 | -5,97028E-12 |
| Y ₁₀ | 1,53765E-10 | -1,8799E-13 |

Tabela 4.24 – Vector de choques para o cenário ascendente e descendente de ordem 10

Os resultados para a carteira de obrigações estão traduzidos na tabela 4.25 supondo que se investiu 100 mil unidades em cada título (note que para os devidos efeitos a quantidade considerada é irrelevante).

Embora se tenha obtido boas aproximações para maturidades curtas, para maturidades superiores a dez anos (no cenário descendente) os parâmetros do modelo não prevêm eficazmente os efeitos do choque, mesmo com $M = 10$. Para o cenário ascendente as aproximações só são aceitáveis para maturidades inferiores a 7 anos.

| $\sum Y_i \times D(i)$ | | | | | | | | |
|------------------------|--------------|--------------|--------------|-----------|-----------|------------|--------------|-----------------|
| Descrição | Quantidade | VP inicial | VP cen. asc. | M=1 | M=3 | M=5 | M=10 | var. rel. real |
| OT 5,375% Jun 2008 | 100.000,00 € | 103.095,97 € | 101.097,86 € | -2,1052% | -1,9388% | -1,9381% | -1,9381% | -1,9381% |
| OT 3,95% Jul 2009 | 100.000,00 € | 100.915,53 € | 95.714,54 € | -6,5934% | -5,2157% | -5,1555% | -5,1538% | -5,1538% |
| OT 5,85% Mai 2010 | 100.000,00 € | 106.469,47 € | 99.184,14 € | -9,7781% | -7,1530% | -6,8629% | -6,8426% | -6,8427% |
| OT 5,15% Jun 2011 | 100.000,00 € | 104.716,56 € | 95.666,53 € | -13,9484% | -9,8608% | -8,8082% | -8,6416% | -8,6424% |
| OT 5% Jun 2012 | 100.000,00 € | 104.481,16 € | 94.105,65 € | -17,611% | -12,953% | -10,612% | -9,919% | -9,931% |
| OT 5,45% Set 2013 | 100.000,00 € | 105.732,90 € | 93.747,82 € | -22,077% | -18,533% | -14,000% | -11,173% | -11,335% |
| OT 3,35% Out 2015 | 100.000,00 € | 92.336,34 € | 79.656,62 € | -30,272% | -35,746% | -28,783% | -9,439% | -13,732% |
| OT 4,35% Out 2017 | 100.000,00 € | 98.028,89 € | 83.207,06 € | -35,479% | -58,957% | -61,904% | 26,669% | -15,120% |
| OT 3,85% Abr 2021 | 100.000,00 € | 93.320,68 € | 76.857,76 € | -44,675% | -130,541% | -237,542% | 888,463% | -17,641% |
| OT 4,10% Abr 2037 | 100.000,00 € | 90.739,02 € | 68.623,64 € | -70,878% | -909,325% | -7943,376% | 1634764,443% | -24,373% |

| $\sum Y_i \times D(i)$ | | | | | | | | |
|------------------------|--------------|--------------|---------------|---------|----------|----------|------------|----------------|
| Descrição | Quantidade | VP inicial | VP cen. desc. | M=1 | M=3 | M=5 | M=10 | var. rel. real |
| OT 5,375% Jun 2008 | 100.000,00 € | 103.095,97 € | 104.223,89 € | 1,1329% | 1,0941% | 1,0940% | 1,0940% | 1,0940% |
| OT 3,95% Jul 2009 | 100.000,00 € | 100.915,53 € | 104.147,16 € | 3,5483% | 3,2076% | 3,2023% | 3,2023% | 3,2023% |
| OT 5,85% Mai 2010 | 100.000,00 € | 106.469,47 € | 111.306,88 € | 5,2622% | 4,5714% | 4,5430% | 4,5435% | 4,5435% |
| OT 5,15% Jun 2011 | 100.000,00 € | 104.716,56 € | 111.194,01 € | 7,5064% | 6,3027% | 6,1821% | 6,1857% | 6,1857% |
| OT 5% Jun 2012 | 100.000,00 € | 104.481,16 € | 112.366,67 € | 9,4774% | 7,8526% | 7,5329% | 7,5473% | 7,5473% |
| OT 5,45% Set 2013 | 100.000,00 € | 105.732,90 € | 115.425,10 € | 11,881% | 9,933% | 9,112% | 9,166% | 9,167% |
| OT 3,35% Out 2015 | 100.000,00 € | 92.336,34 € | 103.530,75 € | 16,291% | 14,637% | 11,832% | 12,112% | 12,124% |
| OT 4,35% Out 2017 | 100.000,00 € | 98.028,89 € | 111.784,13 € | 19,093% | 19,295% | 13,179% | 13,921% | 14,032% |
| OT 3,85% Abr 2021 | 100.000,00 € | 93.320,68 € | 109.726,89 € | 24,042% | 32,038% | 13,998% | 15,246% | 17,580% |
| OT 4,10% Abr 2037 | 100.000,00 € | 90.739,02 € | 117.119,53 € | 38,143% | 157,503% | -48,377% | -3624,583% | 29,073% |

Tabela 4.25 – Aproximações à variação percentual instantânea no modelo vector de durações

Também se tentou calcular o vector dos choques para EPTJ de interpolação cúbica, pois a forma de Y_1 , Y_2 e Y_3 quando a EPTJ é dada por um polinómio de terceiro grau, é bastante simples (recorde-se ainda que o grau do polinómio para as taxas à vista e taxas futuras é mesmo). Para que o *spline* tenha a forma $A_0 + A_1 \times t + A_2 \times t^2 + A_3 \times t^3$ é necessária a seguinte alteração

$$A_{j,0} = a_j - b_j t_j + c_j t_j^2 + d_j t_j^3$$

$$A_{j,1} = (b_j - 2c_j t_j + 3d_j t_j^2)$$

$$A_{j,2} = (c_j - 3d_j t_j)$$

$$A_{j,3} = d_j$$

No entanto, não se conseguiu obter uma boa aproximação, mesmo para maturidades curtas, o que se pode dever ao facto da EPTJ, neste caso, ser composta por segmentos.

4.7 Análise de cenários adicionais

No modelo direccionado mostrou-se que, para além da dimensão dos choques se deve ter em conta o sentido dos mesmos.

Uma proposta de um modelo interno parcial para o risco de taxa de juro seria atribuir uma forma funcional (MS) à EPTJ e acrescentar alguns cenários para além dos 2 já propostos. A sua aplicação seria suficientemente simples para ser posta em prática por qualquer entidade e, ao mesmo tempo, a exposição ao risco de taxa de juro seria captada de uma forma mais abrangente. Por exemplo, adicionar uma estrutura “achatada”, uma estrutura “invertida” e uma estrutura com uma inclinação positiva acentuada (*steep*).

4.7.1 Cenários hipotéticos

Retome-se o problema quando o activo relevante para o exercício representa 75% do valor da carteira. Tendo em conta a forma funcional da EPTJ e as restrições do exemplo 4, vem

| | | soma quadrado | | | |
|--------------------|------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| | | 0,30 | | | |
| | | 100,00% | 4.198.094,40 € | 3.378.480,44 € | 5.083.887,99 € |
| Descrição | Quantidade | Peso | VP | VP UP | VP Down |
| OT 5,375% Jun 2008 | 0 | 0,00% | 0,10 € | 0,10 € | 0,10 € |
| OT 3,95% Jul 2009 | 0 | 0,00% | 0,10 € | 0,09 € | 0,10 € |
| OT 5,85% Mai 2010 | 0 | 0,00% | 0,11 € | 0,10 € | 0,11 € |
| OT 5,15% Jun 2011 | 0 | 0,00% | 0,10 € | 0,09 € | 0,11 € |
| OT 5% Jun 2012 | 0 | 0,00% | 0,10 € | 0,09 € | 0,11 € |
| OT 5,45% Set 2013 | 0 | 0,00% | 0,10 € | 0,09 € | 0,11 € |
| OT 3,35% Out 2015 | 655.140 | 14,41% | 604.931,97 € | 521.862,06 € | 678.270,97 € |
| OT 4,35% Out 2017 | 738.770 | 17,25% | 724.207,75 € | 614.708,53 € | 825.827,24 € |
| OT 3,85% Abr 2021 | 1.149.240 | 25,55% | 1.072.478,35 € | 883.279,97 € | 1.261.025,00 € |
| OT 4,10% Abr 2037 | 1.979.827 | 42,79% | 1.796.475,72 € | 1.358.629,31 € | 2.318.764,14 € |

Tabela 4.26 – Estratégia de imunização com $A_0 < L_0$ no MS

| | Varição Activo | Varição Passivo | Var. absl. | Var. rel |
|------------|----------------|-----------------|-------------|----------|
| cen. asc. | -819.613,96 € | -876.427,87 € | 56.813,91 € | 1,35% |
| cen. desc. | 885.793,60 € | 889.850,63 € | -4.057,03 € | -0,10% |

Tabela 4.27 – Variação líquida da estratégia de imunização com $A_0 < L_0$ no MS

Agora, consideram-se três cenários adicionais: uma EPTJ, “steep”, “achatada” e “invertida”, com os seguintes parâmetros:

| EPTJ invertida | | EPTJ steep | | EPTJ achatada | |
|----------------|--------|----------------|---------|----------------|---------|
| B ₀ | 0,0150 | B ₀ | 0,0500 | B ₀ | 0,0350 |
| B ₁ | 0,0600 | B ₁ | -0,0350 | B ₁ | -0,0030 |
| B ₂ | 0,0300 | B ₂ | 0,0500 | B ₂ | 0,0010 |
| α | 5,0000 | α | 15,0000 | α | 2,0000 |
| B ₃ | 0,0000 | B ₃ | -0,0700 | B ₃ | 0,0100 |
| λ | 3,0000 | λ | 4,8000 | λ | 4,0000 |

Tabela 4.28 – Parâmetros dos cenários adicionais

Graficamente, vem

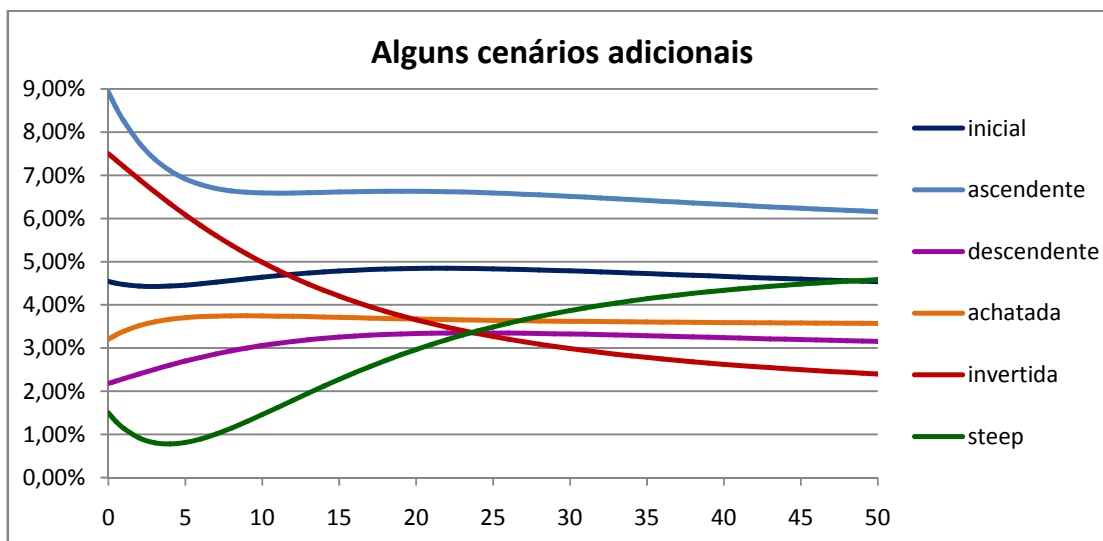


Figura 4.9 – EPTJ para diversos cenários

Os efeitos na carteira dos três cenários adicionais são

| cenários | Variação Activo | Variação Passivo | Var. absl. | Var. rel. |
|-----------|-----------------|------------------|---------------|-----------|
| invertida | 375.132,86 € | 198.842,41 € | 176.290,46 € | 4,20% |
| inclinada | 1.309.693,44 € | 1.430.497,82 € | -120.804,38 € | -2,88% |
| achatada | 576.380,63 € | 556.388,35 € | 19.992,28 € | 0,48% |

Tabela 4.29 – Variação líquida dos cenários adicionais na estratégia de imunização com $A_0 < L_0$ no MS

Ou seja, se se considerar o cenário em que há um *steepening* da EPTJ, isto é, um aumento entre os *spreads* de curto e longo prazo, a carga de capital seria cerca de 120 mil euros.

Este cenário é mais gravoso, porque os cash flows do activo estão mais concentrados em maturidades longas, enquanto os cash flows dos passivos estão mais concentrados em maturidades mais curtas.

Esta ideia ficará mais clara se se considerar um exemplo extremo.

Exemplo 6 – Investir apenas no título OT 4,10% Abr 2037

Suponha-se que o activo a incluir no exercício era composto única e exclusivamente por 3.642.119,69 unidades de OT 4,10% Abr 2037. Veja-se o Anexo 6. Nesta estratégia ignorou-se os parâmetros duração e convexidade, e fez-se uso de se conhecer à partida os choques propostos. Assim, através da ferramenta *Solver* do Excel procurou-se maximizar a soma: $V_{asc.} + V_{desc.}$, sujeito a: $V_{asc.} = V_{desc.}$.

O quadro seguinte compara o cenário ascendente, descendente e “*steep*”:

| cenários | Varição Activo | Varição Passivo | Var. absl. | Var. rel. |
|--------------|----------------|-----------------|---------------|-----------|
| crescente | -805.468,86 € | -876.427,87 € | 70.959,02 € | 2,15% |
| decrecente | 960.809,64 € | 889.850,63 € | 70.959,02 € | 2,15% |
| <i>steep</i> | 1.013.137,71 € | 1.430.497,82 € | -417.360,11 € | -12,63% |

Tabela 4.30 – Variações líquidas tendo em conta os choques do QIS4 e o choque *steep*

Tanto para o cenário ascendente como para o cenário descendente a carteira valoriza no mesmo montante, quase 71 mil euros, enquanto para o cenário *steep* a desvalorização é superior a 400 mil euros.

4.7.2 Imunização de ordens superiores

Como se referiu atrás, no modelo vector de durações o processo de imunização é independente do processo estocástico que rege as taxas de juro. Se for permitida a realização de vendas a descoberto é possível construir uma carteira cujas durações satisfazem qualquer restrição de igualdade.

Exemplo 7 – Imunização de ordens superiores

Retomando o exemplo em que o activo relevante para o exercício representa 75% do passivo, formaliza-se o seguinte problema de minimização:

$$\text{Min} \left[\sum_{i=1}^{10} p_i^2 \right], \quad i = 1, 2, \dots, 10 \quad (4.13)$$

s.a:

$$p_1 \times D_{A1}(1) + p_2 \times D_{A2}(1) + \dots + p_{10} \times D_{A10}(1) = \frac{D_L(1)}{0,75}$$

$$p_1 \times D_{A1}(2) + p_2 \times D_{A2}(2) + \dots + p_{10} \times D_{A10}(2) = \frac{D_L(2)}{0,75}$$

⋮

$$p_1 \times D_{A1}(M) + p_2 \times D_{A2}(M) + \dots + p_{10} \times D_{A10}(M) = \frac{D_L(M)}{0,75}$$

$$\sum_{i=1}^{10} p_i = 1,$$

em que $D_{Ai}(m)$ é a duração de ordem m da obrigação i , enquanto $D_L(m)$ é a duração de ordem m do passivo.

Dado que todas as restrições são de igualdade (é permitida a venda a descoberto), a solução obtém-se facilmente tendo em conta os multiplicadores de Lagrange.

As proporções a serem investidas em cada obrigação para $M=1$, $M=3$ e $M=5$ são:

| | M=1 | M=3 | M=5 |
|------|---------|---------|----------|
| | -5,98% | -15,25% | -446,25% |
| | -2,90% | -7,38% | 482,23% |
| | -0,71% | -2,39% | 430,21% |
| | 2,16% | 3,49% | 47,25% |
| | 4,68% | 8,00% | -338,22% |
| | 7,75% | 12,79% | -531,74% |
| | 13,39% | 20,00% | -87,33% |
| | 16,97% | 22,68% | 743,44% |
| | 23,30% | 25,55% | -237,60% |
| | 41,32% | 32,49% | 38,02% |
| Soma | 100,00% | 100,00% | 100,00% |

Tabela 4.31 – Proporções a investir em cada título

A tabela seguinte resume os efeitos dos vários cenários das estratégias de investimento

| M1 | Cenário | Variação Activo | Variação Passivo | Var. absl. | Var. relativa |
|----|--------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|---------------|
| | ascendente | -831.406,54 € | -876.427,87 € | 45.021,33 € | 1,07% |
| | descendente | 886.759,64 € | 889.850,63 € | -3.090,98 € | -0,07% |
| | <i>steep</i> | 1.337.592,49 € | 1.430.497,82 € | -92.905,34 € | -2,21% |
| | invertido | 329.027,86 € | 198.842,41 € | 130.185,45 € | 3,10% |
| | achatado | 567.626,60 € | 556.388,35 € | 11.238,25 € | 0,27% |

| M3 | Cenário | Variação Activo | Variação Passivo | Var. absl. | Var. relativa |
|----|-----------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------|
| | ascendente | -852.636,84 € | -876.427,87 € | 23.791,03 € | 0,57% |
| | descendente | 882.727,39 € | 889.850,63 € | -7.123,23 € | -0,17% |
| | <i>steep</i> | 1.455.179,37 € | 1.430.497,82 € | 24.681,55 € | 0,59% |
| | invertido | 197.388,57 € | 198.842,41 € | -1.453,84 € | -0,03% |
| | achatado | 541.801,91 € | 556.388,35 € | -14.586,43 € | -0,35% |

| M5 | Cenário | Variação Activo | Variação Passivo | Var. absl. | Var. relativa |
|----|-------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------|
| | ascendente | -991.973,65 € | -876.427,87 € | -115.545,77 € | -2,75% |
| | descendente | 914.006,31 € | 889.850,63 € | 24.155,69 € | 0,58% |
| | <i>steep</i> | 1.388.077,31 € | 1.430.497,82 € | -42.420,51 € | -1,01% |
| | invertido | 218.833,26 € | 198.842,41 € | 19.990,86 € | 0,48% |
| | achatado | 628.355,34 € | 556.388,35 € | 71.966,99 € | 1,71% |

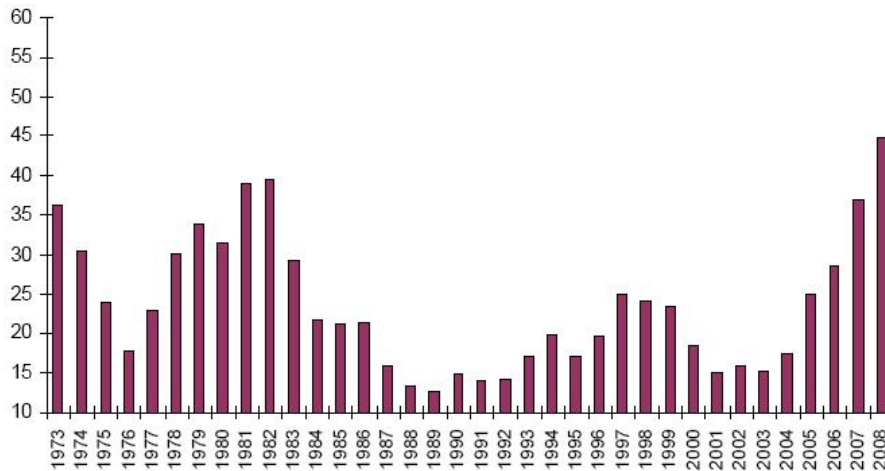
Tabela 4.32 – Impacto dos diversos cenários na estratégia de imunização de ordens superiores

À medida que se aumenta a ordem da imunização, a solução implica tomadas de posição cada vez mais extremas, o que põe em causa o processo de imunização. Como se pode observar, para $M = 3$ o efeito líquido na carteira apresenta uma variabilidade bastante reduzida mesmo tendo em conta os diversos cenários. Nesta situação, a carga de capital seria apenas de 14.586,43€

No entanto, suponha-se que o valor actual total do activo é igual ao valor actual do passivo e que os restantes 25% do investimento estão aplicados em acções do índice S&P 500, de modo a replicar o próprio índice em si.

Segundo Blitzer e Dash (2008) a duração para este índice em meados de 2007 e meados de 2008 seria cerca de 37 e 45 anos, respectivamente.

Exhibit 1: Duration of the U.S. Equity Market



Source: Standard & Poor's. Estimates are for the middle of each calendar year.

Figura 4.10 – Estimação da duração do Índice S&P 500

(Fonte: Standard & Poors 2008)

Ou seja, mesmo tendo uma sólida estratégia de imunização para os activos de rendimento fixo, é necessário ter-se em conta que todos os activos apresentam uma certa sensibilidade à EPTJ. Embora não haja um modelo que seja geralmente aceite no meio académico e/ou profissional e, para além do mais, muitos activos nem sequer estão cotados, é importante ter-se a noção de que, mesmo considerando vários cenários, a carga de capital poderá não ser suficiente para cobrir por inteiro o risco de taxa de juro.

4.7.3 Comparação dos cenários do QIS4 com as EPTJ do Banco Central Europeu

Como foi referido, a calibração dos riscos do projecto de Solvência II pretende ter em conta um VaR a 99,5% (com um horizonte temporal a um ano). O que significa que em média os cenários propostos ocorrerão uma vez em cada 200 anos. Não obstante, é importante que se compare os cenários propostos pelo QIS4 e algumas estruturas já observadas, de modo a comprovarmos empiricamente algumas ideias expostas ao longo do presente texto.

O modelo de Svensson é actualmente aplicado pelo Banco Central Europeu (BCE), que disponibiliza através do seu *site* as estimativas da EPTJ para a zona Euro tendo em conta obrigações governamentais e obrigações *corporate* de *rating* triplo A (risco de crédito mínimo).

Assim, iremos comparar algumas estratégias de investimento partindo da EPTJ inicial proposta pelo QIS4 com os cenários propostos pelo mesmo (tendo em conta o modelo de Svensson) e com 498 observações diárias da EPTJ disponibilizadas pelo BCE entre 29-12-2006 a 09-12-2008. choques

Note-se que, apesar do método utilizado pelo BCE (rendibilidade de obrigações) ser diferente do método utilizado pelo QIS4 (taxas *swap*), estas estruturas são igualmente válidas para se actualizarem os respectivos cash flows.

4.7.3.1 Um teste às condições de Redington

Tendo em conta as condições de Redington e a impossibilidade de vendas a descoberto, comparemos duas estratégias em que o valor do activo é igual ao valor do passivo.

Estratégia A

$$A_0 = L_0 = 5.597.459,20 \quad (4.14)$$

$$D(A) = D(L) = 8,921$$

$$C(A) = C(L) = 138,67$$

Ou seja, a estratégia A corresponde à estratégia de imunização de segunda ordem.

Estratégia B

$$A_0 = L_0 = 5.597.459,20$$

$$D(A) = D(L) = 8,921$$

$$C(A) = 200$$

As quantidades a serem investidas em cada título para cada uma das estratégias, são:

| Descrição | Quantidade A | Quantidade B |
|--------------------|--------------|--------------|
| OT 5,375% Jun 2008 | 0 | 2.128.260 |
| OT 3,95% Jul 2009 | 131.828 | 409.853 |
| OT 5,85% Mai 2010 | 0 | 0 |
| OT 5,15% Jun 2011 | 360.979 | 0 |
| OT 5% Jun 2012 | 454.696 | 0 |
| OT 5,45% Set 2013 | 1.127.232 | 0 |
| OT 3,35% Out 2015 | 620.371 | 0 |
| OT 4,35% Out 2017 | 699.830 | 0 |
| OT 3,85% Abr 2021 | 670.668 | 0 |
| OT 4,10% Abr 2037 | 1.691.398 | 3.294.837 |

Tabela 4.33 – Quantidades a investir na estratégia A e B

Como se vê pelo quadro, se os choques forem paralelos, não há dúvidas que a estratégia B terá uma performance superior à da estratégia A. Tendo em atenção a EPTJ inicial da tabela 4.22, variações em β_0 representam os choques paralelos, obtendo-se então os seguintes resultados:

C=138,67 Estratégia A

| ΔB_0 | Var. Activo | Var. Passivo | Var. absl. | Var. rel. |
|--------------|-----------------|-----------------|---------------------|-----------|
| +0,01 | -1.243.059,70 € | -1.229.939,22 € | -13.120,48 € | -0,23% |
| +0,02 | -1.553.507,62 € | -1.538.345,44 € | -15.162,18 € | -0,27% |
| +0,03 | -1.827.625,65 € | -1.809.176,33 € | -18.449,32 € | -0,33% |
| +0,04 | -2.071.442,21 € | -2.048.477,43 € | -22.964,78 € | -0,41% |
| -0,01 | -480.620,62 € | -468.362,83 € | -12.257,79 € | -0,22% |
| -0,02 | -6.541,36 € | 6.202,95 € | -12.744,31 € | -0,23% |
| -0,03 | 549.511,67 € | 562.493,32 € | -12.981,66 € | -0,23% |
| -0,04 | 1.208.117,84 € | 1.220.061,27 € | -11.943,43 € | -0,21% |

Tabela 4.34 - Impacto na carteira na estratégia A face a choques paralelos

Pode assim observar-se que na estratégia A, para todos os choques paralelos, a carteira sofreu uma desvalorização.

C=200 Estratégia B

| ΔB_0 | Var. Activo | Var. Passivo | Var. absl. | Var. rel. |
|--------------|-----------------|-----------------|---------------------|-----------|
| +0,01 | -1.099.480,01 € | -1.229.939,22 € | 130.459,21 € | 2,33% |
| +0,02 | -1.350.513,68 € | -1.538.345,44 € | 187.831,76 € | 3,36% |
| +0,03 | -1.557.848,94 € | -1.809.176,33 € | 251.327,38 € | 4,49% |
| +0,04 | -1.730.879,02 € | -2.048.477,43 € | 317.598,41 € | 5,67% |
| -0,01 | -413.603,30 € | -468.362,83 € | 54.759,53 € | 0,98% |
| -0,02 | 58.173,66 € | 6.202,95 € | 51.970,71 € | 0,93% |
| -0,03 | 650.304,11 € | 562.493,32 € | 87.810,79 € | 1,57% |
| -0,04 | 1.398.916,72 € | 1.220.061,27 € | 178.855,45 € | 3,20% |

Tabela 4.35 - Impacto na carteira na estratégia B face a choques paralelos

Quanto à estratégia B, para todos os choques paralelos a carteira sofreu uma valorização.

Para os cenários ascendente e descendente verificam-se as seguintes variações:

| Estratégia A | Var. Activo | Var. Passivo | Var. absl. | Var. rel. |
|--------------|---------------|---------------|---------------------|-----------|
| Cen. asc. | -888.661,39 € | -876.427,87 € | -12.233,51 € | -0,22% |
| Cen. desc. | 894.691,65 € | 889.850,63 € | 4.841,02 € | 0,09% |
| Estratégia B | Var. Activo | Var. Passivo | Var. absl. | Var. rel. |
| Cen. asc. | -792.507,27 € | -876.427,87 € | 83.920,61 € | 1,50% |
| Cen. desc. | 906.444,77 € | 889.850,63 € | 16.594,15 € | 0,30% |

Tabela 4.36 – Variações na carteira face aos choques do cenário ascendente e descendente para as estratégias A e B

A convexidade mais elevada da estratégia B aparenta ter um efeito positivo no processo de imunização.

Compare-se agora as variações líquidas da carteira entre as duas estratégias quando estas são confrontadas com 498 observações para a EPTJ (Svensson) estimada pelo BCE entre 29-12-2006 a 09-12-2008, ou seja, supõe-se que estas observações correspondem a 498 choques instantâneos.

Variações líquidas da carteira:

| Estratégia A | | B ₀ | B ₁ | B ₂ | B ₃ | α | λ |
|--------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|-----------|
| Mínimo | Data | | | | | | |
| -14.085,83 € | 19-06-2008 | 4,815% | -0,925% | 4,587% | -3,552% | 1,234 | 1,477 |
| Máximo | Data | | | | | | |
| 22.897,21 € | 04-12-2008 | 0,010% | 2,214% | 8,863% | -1,731% | 11,757 | 0,558 |
| Média | Desv. Padrão | | | | | | |
| -2.704,55 € | 8.078,29 € | | | | | | |

Tabela 4.37 – Nível de imunização da estratégia A face a 498 observações da EPTJ do BCE

| Estratégia B | | B ₀ | B ₁ | B ₂ | B ₃ | α | λ |
|---------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|-----------|
| Mínimo | Data | | | | | | |
| -141.279,03 € | 17-03-2008 | 5,303% | -1,307% | -1,363% | -3,438% | 2,347 | 2,252 |
| Máximo | Data | | | | | | |
| 114.331,85 € | 04-12-2008 | 0,010% | 2,214% | 8,863% | -1,731% | 11,757 | 0,558 |
| Média | Desv. Padrão | | | | | | |
| -38.713,55 € | 40.849,26 € | | | | | | |

Tabela 4.38 – Nível de imunização da estratégia B face a 498 observações da EPTJ do BCE

Ou seja, quando confrontada com as várias EPTJ, a estratégia A apresenta um grau de imunização bastante superior ao da estratégia B, o que mostra que as condições de Redington ou a estratégia de Barbell-Bullet não são isentas de risco.

4.7.3.2 Exemplo 6 revisto

Retome-se agora o exemplo 6, em que se investe em 3.642.119,69 unidades de OT 4,10% Abr 2037. Para os cenários do QIS4 obteve-se uma valorização de cerca de 71 mil euros tanto para o cenário ascendente como para o cenário descendente. Mostrou-se que adicionado um cenário hipotético de uma curva bastante inclinada a carteira desvalorizava cerca de 400 mil euros. Compare-se agora a estratégia com a amostra em questão.

| Exemplo 6 | | B ₀ | B ₁ | B ₂ | B ₃ | α | λ |
|---------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------|-------|
| Mínimo | Data | | | | | | |
| -161.117,13 € | 17-11-2008 | 5,286% | -2,889% | -0,691% | -5,017% | 0,931 | 1,751 |
| Máximo | Data | | | | | | |
| 154.320,36 € | 04-12-2008 | 0,010% | 2,214% | 8,863% | -1,731% | 11,757 | 0,558 |
| Média | Desv. Padrão | | | | | | |
| -35.798,10 € | 49.479,71 € | | | | | | |

Tabela 4.39 - Nível de imunização da estratégia do exemplo 6 face a 498 observações da EPTJ do BCE

Note-se que a EPTJ sofre frequentemente choques nas taxas de curto prazo enquanto as de longo prazo se mantêm relativamente inalteradas. Assim, verifica-se uma valorização do passivo que não é acompanhada pelo título.

4.7.3.3 Imunização de terceira ordem

Por fim, analisa-se a estratégia de imunização de terceira ordem, em que o valor do activo é igual ao valor do passivo. Veremos que, nesta situação, o desvio padrão dos diversos cenários é o menor dos casos analisados.

Resolvendo o seguinte problema

$$\text{Min} \left[\sum_{i=1}^{10} p_i^2 \right]$$

$$s.a: \quad A_0 = L_0 = 5.597.459,20; \quad D(A) = D(L) = 8,921;$$

$$C(A) = D_A(2) = C(L) = D_L(2) = 138,67; \quad D_A(3) = D_L(3) = 2.684$$

e recorrendo novamente ao método dos multiplicadores de Lagrange obtém-se a seguinte estratégia de investimento

| Soma quadrado | | |
|--------------------|-----------|-------------|
| 0,1657632 | | |
| Descrição | proporção | Quantidades |
| OT 5,375% Jun 2008 | 7,76% | 421.281 |
| OT 3.95% Jul 2009 | 4,64% | 257.268 |
| OT 5.85% Mai 2010 | 3,39% | 178.036 |
| OT 5.15% Jun 2011 | 2,75% | 146.901 |
| OT 5% Jun 2012 | 3,16% | 169.383 |
| OT 5.45% Set 2013 | 4,68% | 247.832 |
| OT 3.35% Out 2015 | 9,53% | 577.621 |
| OT 4.35% Out 2017 | 14,86% | 848.495 |
| OT 3.85% Abr 2021 | 25,41% | 1.524.236 |
| OT 4.10% Abr 2037 | 23,82% | 1.469.669 |

Tabela 4.40 – Proporções/quantidades a investir em cada OT na imunização de 3ª ordem

| M=3 | | | | | | | |
|-------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------|-------|
| Mínimo | Data | B ₀ | B ₁ | B ₂ | B ₃ | α | λ |
| -9.778,89 € | 31-10-2008 | 4,969% | -4,959% | 6,301% | -8,415% | 0,250 | 0,889 |
| Máximo | Data | B ₀ | B ₁ | B ₂ | B ₃ | α | λ |
| -10,62 € | 05-06-2008 | 5,252% | -1,618% | 3,996% | -4,631% | 1,119 | 2,140 |
| Média | Desv. Padrão | | | | | | |
| -2.933,80 € | 1.891,87 € | | | | | | |

Tabela 4.41 - Nível de imunização da estratégia de terceira ordem face a 498 observações da EPTJ do BCE

Apesar de nesta estratégia todas as observações terem resultado em desvalorizações da carteira, essas mesmas desvalorizações não representam perdas materiais. Chama-se ainda à atenção que, neste caso particular, o problema de minimização não originou proporções negativas, o que nem sempre acontece.

Conclusão

No último ponto procurou aplicar-se alguns dos conceitos expostos tendo em conta o exercício do Estudo de Impacto Quantitativo 4 (QIS4) para o risco de taxa de juro.

Concluiu-se que não só a análise de dois cenários relativamente simétricos e paralelos é insuficiente para se captar eficazmente a exposição à EPTJ de uma dada carteira, como as estratégias que mais beneficiam com os choques propostos são, ao mesmo tempo, aquelas que maiores perdas originam quando comparadas com outras estruturas (hipotéticas e reais).

A explicação para este facto advém da natureza dos choques e da própria carteira (activos e passivos) em si. Enquanto no primeiro ponto se explorou os benefícios da convexidade num contexto de choques paralelos, no segundo, analisou-se em parte, os possíveis efeitos de uma convexidade elevada quando as deslocações nas taxas são assimétricas. Assim, observou-se que nestas situações, uma convexidade elevada poderá ter um efeito prejudicial na carteira.

No primeiro ponto mostrou-se ainda que aumentar a convexidade de um conjunto de activos de rendimento fixo é equivalente a aumentar a dispersão dos seus cash flows, o que implica concentrar o investimento em maturidades de curto e de longo prazo. Assim, o cenário mais gravoso será aquele em que se verifica uma inclinação na EPTJ com uma descida das taxas de curto-médio prazo e uma subida das taxas de longo prazo, tendo em conta um passivo da mesma natureza que o observado na tabela 4.2. Este facto é agravado quando o valor dos activos a englobar no exercício é inferior ao valor do passivo.

Assim, propõe-se que para além dos dois cenários que englobam o exercício do QIS4, se inclua pelo menos mais três assimétricos (de acordo com um VaR a 99,5% a um ano). Propõe-se também que seja considerada uma forma funcional para as estruturas de cada cenário de modo a que não haja necessidade de assumir um processo de interpolação, embora a utilização da estrutura inicial proposta seja facultativa. Deste modo, pretende captar-se de uma forma mais abrangente a exposição ao risco de taxa de juro de uma determinada carteira.

Alternativamente, podia propor-se a simulação estocástica da EPTJ, fixando-se, por exemplo, um horizonte temporal de um trimestre, isto é, $dt = 0,25$; e, como é evidente, uma parametrização adequada, pressupondo que durante um trimestre não haveria possibilidade de se alterar a composição da carteira. Após as várias simulações seria seleccionada a variação líquida (mais gravosa) do percentil 99,5%. Em relação à escolha do modelo, este teria de ser um modelo multi-factor, caso contrário cada cenário só produzirá choques na mesma direcção. No entanto, o número de simulações a serem efectuadas implicaria um esforço adicional das seguradoras de menor dimensão que não dispõem de um software adequado e para além do mais, o que importa sobretudo analisar são os efeitos dos cenários extremos e assimétricos.

Para este tipo de choques, concluímos que a estratégia de imunização mais eficaz é a imunização de terceira ordem, que por vezes, dependendo da carteira, pode obrigar a vendas a descoberto. Para imunizações de ordens superiores, a estratégia de investimento pode obrigar a tomadas de posição extremas, o que não só poderá ir contra a política de investimentos da entidade em questão, como põe em causa o próprio processo de imunização.

Note-se ainda que, no exercício de risco de taxa de juro do QIS4, falta uma *guidance* específica relativamente aos fundos de investimento, nas TS.IX.A.4, vem

“Risk exposures of collective investment schemes should be allocated to sub-modules on a look-through basis if possible and on a best effort basis otherwise”.

Assim, se houver um fundo de investimento maioritariamente composto por obrigações, de modo que o exercício seja resolvido com rigor, é necessário que haja informação título a título.

Por fim, mesmo aplicando uma estratégia de imunização sólida, é importante ter-se em conta que nunca é possível eliminar completamente a exposição relativamente à EPTJ.

Como comentário final, expressa-se a importância das companhias de seguros com linhas de negócio a longo prazo, adoptarem uma política de gestão do risco da taxa de juro pois, como se procurou ilustrar, caso não o façam, mesmo que as estimativas do passivo sejam 100% precisas e com investimentos apenas em activos de rendimento fixo, sem risco de crédito, estas poderão incorrer em perdas significativas, face a variações na estrutura de prazos das taxas de juro.

Anexo 1 – Desigualdade M-Quadrado

A desigualdade mostra-se facilmente tendo em conta que

$$\int_t^H \Delta f(z) dz = \int_t^H \Delta f(H) dz - \int_t^H \left[\int_z^H \frac{\partial \Delta f(u)}{\partial u} du \right] dz \quad (\text{A1.1})$$

Mudando a ordem de integração do segundo termo do lado direito da equação, tem-se

$$\int_t^H \Delta f(z) dz = -\Delta f(H)(t-H) - \int_t^H (u-t) \frac{\partial \Delta f(u)}{\partial u} du \quad (\text{A1.2})$$

em que K_4 representa a inclinação máxima no choque na EPTJ das taxas instantâneas futuras ao longo da maturidade do termo t . Considerem-se, assim, dois casos:

Caso 1: $H \geq t$, tem-se

$$\int_t^H (u-t) \frac{\partial \Delta f(u)}{\partial u} du \leq \int_t^H (u-t) K_4 du = \frac{1}{2} K_4 (H-t)^2 \quad (\text{A1.3})$$

Caso 2: $H < t$, tem-se

$$\int_t^H (u-t) \frac{\partial \Delta f(u)}{\partial u} du = \int_H^t (t-u) K \frac{\partial \Delta f(u)}{\partial u} du \leq \int_H^t (t-u) K_4 du = \frac{1}{2} K_4 (t-H)^2 \quad (\text{A1.4})$$

Combinando (A1.3) e (A1.4) e tendo em conta (A1.2), obtém-se,

$$\int_t^H \Delta f(z) dz \geq -\Delta f(H)(t-H) - \frac{1}{2} K_4 (t-H)^2, \quad t \geq 0 \quad (\text{A1.5})$$

Logo,
$$\exp \left\{ \int_t^H \Delta f(z) dz \right\} \geq 1 - \Delta f(H)(t-H) - \frac{1}{2} K_4 (t-H)^2, \quad t \geq 0 \quad (\text{A1.6})$$

Note que

$$\frac{\Delta P_H}{P_0} = \frac{1}{P_0} \sum_{t=1}^T CF_t \times e^{-\int_0^t f(z) dz} \left[e^{\int_t^H \Delta f(z) dz} - 1 \right]. \quad (\text{A1.7})$$

Substituindo (A1.6) em (A1.7), obtém-se (2.4).

Anexo 2

Justificação do grau do polinómio do *spline* de interpolação

Seja $f(t)$ um *spline* cúbico de interpolação e $h(t)$ uma função contínua que intercepta todos os *nós* que admite a existência da primeira e segunda derivada no domínio $[t_0, t_K]$, tem-se que

$$\int_{t_0}^{t_K} [f''(t)]^2 dt \leq \int_{t_0}^{t_K} [h''(t)]^2 dt, \quad (\text{A2.1})$$

sujeito a

$$f''(t_0) = 0 \text{ e } f''(t_K) = 0 \text{ (spline natural), ou} \quad (\text{A2.2})$$

$$f'(t_0) = h'(t_0) \text{ e } f'(t_K) = h'(t_K) \text{ (clamped cubic spline).} \quad (\text{A2.3})$$

Seja $D(t) = h(t) - f(t)$, vem

$$\int_{t_0}^{t_K} [h''(t)]^2 dt = \int_{t_0}^{t_K} [f''(t)]^2 dt + \int_{t_0}^{t_K} [D''(t)]^2 dt + 2 \int_{t_0}^{t_K} f''(t) D''(t) dt, \quad (\text{A2.4})$$

logo, basta mostrar que $\int_{t_0}^{t_K} f''(t) D''(t) dt = 0$.

Integrando por partes o integral do último termo de (A2.4) obtém-se

$$\int_{t_0}^{t_K} f''(t) D''(t) dt = f''(t_K) D'(t_K) - f''(t_0) D'(t_0) - \int_{t_0}^{t_K} f'''(t) D'(t) dt. \quad (\text{A2.5})$$

Se $f(t)$ for um *spline* cúbico natural, então $f''(t_0) = 0$ e $f''(t_K) = 0$. Se $f(t)$ for um *clamped cubic spline* em que as inclinações das extremidades são fixadas de modo a satisfazer a condição imposta em (A2.3), então $D'(t_0) = 0$ e $D'(t_K) = 0$.

O último termo de (A2.5) pode ser escrito como $\sum_{j=0}^{K-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'''(t)D'(t)dt$. Integrando cada termo do somatório por partes, resulta em

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f'''(t)D'(t)dt = f'''(t)D(t_{j+1}) - f'''(t)D(t_j) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} f^{(4)}(t)D(t)dt. \quad (\text{A2.6})$$

Como $h(t)$ passa por todos os *nós*, então $D(t_j) = h(t_j) - f(t_j) = 0$, $j=0,1,\dots,K$. Logo, os primeiros dois termos de (A2.6) são iguais a zero. O último termo de (A2.6) também é zero, pois $f(t)$ em cada segmento é um polinómio de terceiro grau, consequentemente

$$f^{(4)}(t) = 0, \quad \forall t. \quad \text{Ou seja, } \int_{t_0}^{t_K} f'''(t)D''(t)dt = 0.$$

Anexo 3

Parâmetros dos *splines*

Para os *spline* de regressão de McCulloch, considerou-se que as taxas propostas no QIS4 para cada cenário representam as rendibilidades de obrigações de cupão zero, logo o vector \mathbf{y} e a matriz \mathbf{X} (veja-se o ponto 3.3.2) definem-se da seguinte forma:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} (1+i_0)^{-0} - 1 \\ (1+i_{0,25})^{-0,25} - 1 \\ \vdots \\ (1+i_{75})^{-75} - 1 \end{bmatrix}_{(77 \times 1)}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} g_1(t_1) & g_2(t_1) & \dots & g_9(t_1) \\ g_1(t_2) & g_2(t_2) & \dots & g_9(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(t_{75}) & g_2(t_{75}) & \dots & g_9(t_{75}) \end{pmatrix}_{(77 \times 9)}$$

em que a função $g_i(t)$ é dada pela expressão (3.30). Deste modo, vem

| i | T _i | Parâmetros | Cenários | | |
|---|----------------|------------|-----------|------------|-------------|
| | | | inicial | ascendente | descendente |
| | | a1 | 0,001291 | 0,009279 | -0,001855 |
| 1 | 0,00 | a2 | 0,001135 | 0,001408 | 0,000476 |
| 2 | 7,71 | a3 | 0,001305 | 0,001690 | 0,000946 |
| 3 | 18,43 | a4 | 0,000524 | 0,000399 | 0,000520 |
| 4 | 29,14 | a5 | 0,000316 | 0,000371 | 0,000230 |
| 5 | 39,86 | a6 | 0,000140 | 0,000061 | 0,000172 |
| 6 | 50,57 | a7 | 0,000114 | 0,000117 | 0,000100 |
| 7 | 61,29 | a8 | 0,000037 | -0,000058 | 0,000108 |
| 8 | 75,00 | a9 | -0,043188 | -0,077773 | -0,021975 |

Onde os nós dos *splines* foram obtidos pelo método proposto no ponto (3.3.2).

Clamped cubic spline do cenário inicial

| t_j | a_j | b_j | c_j | d_j |
|-------|-----------|------------|------------|------------|
| 0 | 3,916E-02 | 8,600E-02 | -3,280E-01 | 4,277E-01 |
| 0,25 | 4,684E-02 | 2,172E-03 | -7,265E-03 | 9,110E-03 |
| 0,5 | 4,707E-02 | 2,479E-04 | -4,320E-04 | -1,018E-03 |
| 1 | 4,696E-02 | -9,476E-04 | -1,959E-03 | 1,209E-03 |
| 2 | 4,526E-02 | -1,238E-03 | 1,668E-03 | -5,950E-04 |
| 3 | 4,510E-02 | 3,130E-04 | -1,169E-04 | 3,665E-05 |
| 4 | 4,533E-02 | 1,892E-04 | -6,931E-06 | 1,685E-05 |
| 5 | 4,553E-02 | 2,259E-04 | 4,363E-05 | -1,772E-06 |
| 6 | 4,580E-02 | 3,078E-04 | 3,831E-05 | -6,283E-06 |
| 7 | 4,614E-02 | 3,656E-04 | 1,946E-05 | 6,797E-06 |
| 8 | 4,653E-02 | 4,249E-04 | 3,985E-05 | -1,806E-05 |
| 9 | 4,698E-02 | 4,504E-04 | -1,434E-05 | 5,994E-06 |
| 10 | 4,742E-02 | 4,397E-04 | 3,639E-06 | -1,809E-05 |
| 11 | 4,784E-02 | 3,927E-04 | -5,064E-05 | 1,244E-05 |
| 12 | 4,820E-02 | 3,287E-04 | -1,331E-05 | -4,394E-06 |
| 13 | 4,851E-02 | 2,889E-04 | -2,649E-05 | 4,230E-06 |
| 14 | 4,877E-02 | 2,487E-04 | -1,380E-05 | -3,667E-06 |
| 15 | 4,901E-02 | 2,100E-04 | -2,480E-05 | 5,374E-06 |
| 16 | 4,920E-02 | 1,766E-04 | -8,682E-06 | 3,418E-07 |
| 17 | 4,936E-02 | 1,602E-04 | -7,657E-06 | -3,013E-06 |
| 18 | 4,951E-02 | 1,359E-04 | -1,670E-05 | 1,465E-05 |
| 19 | 4,965E-02 | 1,464E-04 | 2,727E-05 | -5,325E-05 |
| 20 | 4,977E-02 | 4,123E-05 | -1,325E-04 | 5,654E-05 |
| 21 | 4,973E-02 | -5,410E-05 | 3,715E-05 | -1,460E-05 |
| 22 | 4,970E-02 | -2,360E-05 | -6,644E-06 | 1,435E-06 |
| 23 | 4,967E-02 | -3,258E-05 | -2,339E-06 | 8,514E-06 |
| 24 | 4,965E-02 | -1,172E-05 | 2,320E-05 | -3,578E-05 |
| 25 | 4,962E-02 | -7,265E-05 | -8,414E-05 | 3,735E-05 |
| 26 | 4,950E-02 | -1,289E-04 | 2,791E-05 | -9,617E-06 |
| 27 | 4,939E-02 | -1,019E-04 | -9,381E-07 | 1,679E-07 |
| 28 | 4,929E-02 | -1,033E-04 | -4,344E-07 | 8,126E-06 |
| 29 | 4,919E-02 | -7,976E-05 | 2,394E-05 | -3,338E-05 |
| 30 | 4,911E-02 | -1,320E-04 | -7,620E-05 | 3,455E-05 |
| 31 | 4,893E-02 | -1,808E-04 | 2,745E-05 | -9,474E-06 |
| 32 | 4,877E-02 | -1,543E-04 | -9,682E-07 | 2,352E-06 |
| 33 | 4,862E-02 | -1,492E-04 | 6,087E-06 | -8,074E-07 |
| 34 | 4,847E-02 | -1,394E-04 | 3,665E-06 | 1,036E-07 |
| 35 | 4,834E-02 | -1,318E-04 | 3,975E-06 | -2,950E-07 |
| 36 | 4,821E-02 | -1,247E-04 | 3,090E-06 | 4,628E-07 |
| 37 | 4,809E-02 | -1,171E-04 | 4,479E-06 | -2,105E-06 |
| 38 | 4,797E-02 | -1,145E-04 | -1,837E-06 | 7,466E-06 |
| 39 | 4,786E-02 | -9,577E-05 | 2,056E-05 | -2,820E-05 |

| t_j | a_j | b_j | c_j | d_j |
|-------|-----------|------------|------------|------------|
| 40 | 4,776E-02 | -1,393E-04 | -6,404E-05 | 2,885E-05 |
| 41 | 4,759E-02 | -1,808E-04 | 2,252E-05 | -7,857E-06 |
| 42 | 4,742E-02 | -1,593E-04 | -1,049E-06 | 1,991E-06 |
| 43 | 4,726E-02 | -1,554E-04 | 4,925E-06 | -6,375E-07 |
| 44 | 4,711E-02 | -1,475E-04 | 3,012E-06 | 7,596E-08 |
| 45 | 4,697E-02 | -1,412E-04 | 3,240E-06 | -1,071E-07 |
| 46 | 4,683E-02 | -1,351E-04 | 2,919E-06 | -5,075E-08 |
| 47 | 4,670E-02 | -1,294E-04 | 2,766E-06 | -5,932E-08 |
| 48 | 4,657E-02 | -1,240E-04 | 2,589E-06 | -5,115E-08 |
| 49 | 4,645E-02 | -1,190E-04 | 2,435E-06 | -4,805E-08 |
| 50 | 4,633E-02 | -1,143E-04 | 2,291E-06 | -4,410E-08 |
| 51 | 4,622E-02 | -1,098E-04 | 2,159E-06 | -4,083E-08 |
| 52 | 4,611E-02 | -1,056E-04 | 2,036E-06 | -3,778E-08 |
| 53 | 4,601E-02 | -1,017E-04 | 1,923E-06 | -3,503E-08 |
| 54 | 4,591E-02 | -9,794E-05 | 1,818E-06 | -3,252E-08 |
| 55 | 4,581E-02 | -9,441E-05 | 1,720E-06 | -3,024E-08 |
| 56 | 4,572E-02 | -9,106E-05 | 1,629E-06 | -2,815E-08 |
| 57 | 4,563E-02 | -8,788E-05 | 1,545E-06 | -2,624E-08 |
| 58 | 4,554E-02 | -8,487E-05 | 1,466E-06 | -2,448E-08 |
| 59 | 4,546E-02 | -8,201E-05 | 1,393E-06 | -2,288E-08 |
| 60 | 4,538E-02 | -7,929E-05 | 1,324E-06 | -2,140E-08 |
| 61 | 4,530E-02 | -7,671E-05 | 1,260E-06 | -2,004E-08 |
| 62 | 4,523E-02 | -7,425E-05 | 1,200E-06 | -1,878E-08 |
| 63 | 4,515E-02 | -7,191E-05 | 1,144E-06 | -1,762E-08 |
| 64 | 4,508E-02 | -6,967E-05 | 1,091E-06 | -1,656E-08 |
| 65 | 4,501E-02 | -6,754E-05 | 1,041E-06 | -1,556E-08 |
| 66 | 4,495E-02 | -6,551E-05 | 9,943E-07 | -1,466E-08 |
| 67 | 4,488E-02 | -6,356E-05 | 9,504E-07 | -1,375E-08 |
| 68 | 4,482E-02 | -6,170E-05 | 9,091E-07 | -1,319E-08 |
| 69 | 4,476E-02 | -5,992E-05 | 8,695E-07 | -1,158E-08 |
| 70 | 4,470E-02 | -5,822E-05 | 8,348E-07 | -1,418E-08 |
| 71 | 4,464E-02 | -5,659E-05 | 7,923E-07 | -1,287E-09 |
| 72 | 4,459E-02 | -5,501E-05 | 7,884E-07 | -4,644E-08 |
| 73 | 4,453E-02 | -5,357E-05 | 6,491E-07 | 1,248E-07 |
| 74 | 4,448E-02 | -7,759E-05 | 1,024E-06 | 2,518E-05 |

Clamped cubic spline do cenário ascendente

| t_j | a_j | b_j | c_j | d_j |
|-------|-----------|------------|------------|------------|
| 0 | 7,597E-02 | 1,600E-01 | -5,887E-01 | 7,483E-01 |
| 0,25 | 9,087E-02 | 5,961E-03 | -2,748E-02 | 4,324E-02 |
| 0,5 | 9,132E-02 | 3,318E-04 | 4,958E-03 | -1,297E-02 |
| 1 | 9,110E-02 | -4,438E-03 | -1,450E-02 | 7,949E-03 |
| 2 | 8,011E-02 | -9,588E-03 | 9,349E-03 | -3,662E-03 |
| 3 | 7,621E-02 | -1,874E-03 | -1,636E-03 | 7,303E-04 |
| 4 | 7,343E-02 | -2,955E-03 | 5,550E-04 | -9,245E-06 |
| 5 | 7,103E-02 | -1,873E-03 | 5,273E-04 | -6,885E-05 |
| 6 | 6,961E-02 | -1,025E-03 | 3,207E-04 | -1,637E-04 |
| 7 | 6,874E-02 | -8,741E-04 | -1,703E-04 | 2,324E-04 |
| 8 | 6,793E-02 | -5,175E-04 | 5,269E-04 | -2,967E-04 |
| 9 | 6,764E-02 | -3,539E-04 | -3,632E-04 | 4,054E-04 |
| 10 | 6,733E-02 | 1,357E-04 | 8,528E-04 | -3,846E-04 |
| 11 | 6,794E-02 | 6,874E-04 | -3,011E-04 | 1,171E-04 |
| 12 | 6,844E-02 | 4,364E-04 | 5,011E-05 | -4,487E-05 |
| 13 | 6,888E-02 | 4,021E-04 | -8,450E-05 | 6,114E-05 |
| 14 | 6,926E-02 | 4,165E-04 | 9,892E-05 | -1,871E-04 |
| 15 | 6,959E-02 | 5,297E-05 | -4,624E-04 | 1,881E-04 |
| 16 | 6,937E-02 | -3,074E-04 | 1,020E-04 | -5,106E-05 |
| 17 | 6,911E-02 | -2,566E-04 | -5,117E-05 | 2,197E-05 |
| 18 | 6,882E-02 | -2,930E-04 | 1,473E-05 | -3,218E-05 |
| 19 | 6,851E-02 | -3,601E-04 | -8,181E-05 | 1,104E-04 |
| 20 | 6,818E-02 | -1,924E-04 | 2,495E-04 | -1,047E-04 |
| 21 | 6,814E-02 | -7,438E-06 | -6,460E-05 | 2,882E-05 |
| 22 | 6,809E-02 | -5,020E-05 | 2,184E-05 | -1,111E-05 |
| 23 | 6,805E-02 | -3,985E-05 | -1,150E-05 | 1,517E-05 |
| 24 | 6,802E-02 | -1,733E-05 | 3,401E-05 | -4,996E-05 |
| 25 | 6,798E-02 | -9,918E-05 | -1,159E-04 | 5,142E-05 |
| 26 | 6,782E-02 | -1,766E-04 | 3,840E-05 | -1,324E-05 |
| 27 | 6,767E-02 | -1,396E-04 | -1,328E-06 | 2,481E-07 |
| 28 | 6,753E-02 | -1,415E-04 | -5,837E-07 | 1,113E-05 |
| 29 | 6,740E-02 | -1,093E-04 | 3,280E-05 | -4,573E-05 |
| 30 | 6,727E-02 | -1,809E-04 | -1,044E-04 | 4,734E-05 |
| 31 | 6,704E-02 | -2,477E-04 | 3,761E-05 | -1,298E-05 |
| 32 | 6,681E-02 | -2,114E-04 | -1,326E-06 | 3,222E-06 |
| 33 | 6,660E-02 | -2,044E-04 | 8,339E-06 | -1,106E-06 |
| 34 | 6,641E-02 | -1,910E-04 | 5,020E-06 | 1,419E-07 |
| 35 | 6,622E-02 | -1,805E-04 | 5,446E-06 | -4,041E-07 |
| 36 | 6,605E-02 | -1,708E-04 | 4,234E-06 | 6,341E-07 |
| 37 | 6,588E-02 | -1,605E-04 | 6,136E-06 | -2,884E-06 |
| 38 | 6,572E-02 | -1,569E-04 | -2,517E-06 | 1,023E-05 |
| 39 | 6,557E-02 | -1,312E-04 | 2,817E-05 | -3,863E-05 |

| t_j | a_j | b_j | c_j | d_j |
|-------|-----------|------------|------------|------------|
| 40 | 6,572E-02 | -1,569E-04 | -2,517E-06 | 1,023E-05 |
| 41 | 6,557E-02 | -1,312E-04 | 2,817E-05 | -3,863E-05 |
| 42 | 6,543E-02 | -1,908E-04 | -8,774E-05 | 3,953E-05 |
| 43 | 6,519E-02 | -2,477E-04 | 3,086E-05 | -1,076E-05 |
| 44 | 6,496E-02 | -2,182E-04 | -1,437E-06 | 2,728E-06 |
| 45 | 6,475E-02 | -2,129E-04 | 6,747E-06 | -8,734E-07 |
| 46 | 6,454E-02 | -2,021E-04 | 4,127E-06 | 1,041E-07 |
| 47 | 6,434E-02 | -1,935E-04 | 4,439E-06 | -1,467E-07 |
| 48 | 6,415E-02 | -1,851E-04 | 3,999E-06 | -6,953E-08 |
| 49 | 6,397E-02 | -1,773E-04 | 3,790E-06 | -8,126E-08 |
| 50 | 6,380E-02 | -1,699E-04 | 3,546E-06 | -7,008E-08 |
| 51 | 6,363E-02 | -1,630E-04 | 3,336E-06 | -6,582E-08 |
| 52 | 6,347E-02 | -1,566E-04 | 3,139E-06 | -6,041E-08 |
| 53 | 6,332E-02 | -1,505E-04 | 2,957E-06 | -5,593E-08 |
| 54 | 6,317E-02 | -1,447E-04 | 2,790E-06 | -5,176E-08 |
| 55 | 6,303E-02 | -1,393E-04 | 2,634E-06 | -4,799E-08 |
| 56 | 6,289E-02 | -1,342E-04 | 2,490E-06 | -4,456E-08 |
| 57 | 6,276E-02 | -1,293E-04 | 2,357E-06 | -4,143E-08 |
| 58 | 6,263E-02 | -1,247E-04 | 2,232E-06 | -3,856E-08 |
| 59 | 6,251E-02 | -1,204E-04 | 2,117E-06 | -3,594E-08 |
| 60 | 6,239E-02 | -1,163E-04 | 2,009E-06 | -3,354E-08 |
| 61 | 6,228E-02 | -1,124E-04 | 1,908E-06 | -3,134E-08 |
| 62 | 6,217E-02 | -1,086E-04 | 1,814E-06 | -2,931E-08 |
| 63 | 6,206E-02 | -1,051E-04 | 1,726E-06 | -2,745E-08 |
| 64 | 6,196E-02 | -1,017E-04 | 1,644E-06 | -2,573E-08 |
| 65 | 6,186E-02 | -9,851E-05 | 1,567E-06 | -2,415E-08 |
| 66 | 6,176E-02 | -9,545E-05 | 1,494E-06 | -2,268E-08 |
| 67 | 6,167E-02 | -9,253E-05 | 1,426E-06 | -2,132E-08 |
| 68 | 6,158E-02 | -8,974E-05 | 1,362E-06 | -2,009E-08 |
| 69 | 6,149E-02 | -8,708E-05 | 1,302E-06 | -1,883E-08 |
| 70 | 6,140E-02 | -8,453E-05 | 1,245E-06 | -1,807E-08 |
| 71 | 6,132E-02 | -8,209E-05 | 1,191E-06 | -1,586E-08 |
| 72 | 6,124E-02 | -7,976E-05 | 1,144E-06 | -1,943E-08 |
| 73 | 6,116E-02 | -7,753E-05 | 1,085E-06 | -1,764E-09 |
| 74 | 6,108E-02 | -7,536E-05 | 1,080E-06 | -6,362E-08 |

Natural cubic spline do cenário descendente

| t_j | a_j | b_j | c_j | d_j |
|-------|-----------|------------|------------|------------|
| 0 | 1,919E-02 | 4,000E-02 | -1,461E-01 | 1,852E-01 |
| 0,25 | 2,295E-02 | 1,679E-03 | -7,201E-03 | 9,190E-03 |
| 0,5 | 2,306E-02 | -1,980E-04 | -3,081E-04 | 9,720E-04 |
| 1 | 2,301E-02 | 2,228E-04 | 1,150E-03 | -3,940E-04 |
| 2 | 2,399E-02 | 1,341E-03 | -3,220E-05 | -4,295E-05 |
| 3 | 2,525E-02 | 1,147E-03 | -1,611E-04 | 5,074E-05 |
| 4 | 2,629E-02 | 9,774E-04 | -8,843E-06 | 5,754E-05 |
| 5 | 2,732E-02 | 1,132E-03 | 1,638E-04 | -2,195E-04 |
| 6 | 2,839E-02 | 8,013E-04 | -4,947E-04 | 3,655E-04 |
| 7 | 2,907E-02 | 9,083E-04 | 6,017E-04 | -3,325E-04 |
| 8 | 3,024E-02 | 1,114E-03 | -3,959E-04 | 4,190E-05 |
| 9 | 3,100E-02 | 4,480E-04 | -2,702E-04 | 1,139E-04 |
| 10 | 3,130E-02 | 2,494E-04 | 7,153E-05 | -4,025E-05 |
| 11 | 3,158E-02 | 2,717E-04 | -4,922E-05 | 1,151E-05 |
| 12 | 3,181E-02 | 2,078E-04 | -1,470E-05 | 1,222E-05 |
| 13 | 3,202E-02 | 2,150E-04 | 2,198E-05 | -6,100E-05 |
| 14 | 3,219E-02 | 7,598E-05 | -1,610E-04 | 2,376E-04 |
| 15 | 3,234E-02 | 4,668E-04 | 5,519E-04 | -4,009E-04 |
| 16 | 3,296E-02 | 3,678E-04 | -6,509E-04 | 3,959E-04 |
| 17 | 3,307E-02 | 2,535E-04 | 5,366E-04 | -1,948E-04 |
| 18 | 3,367E-02 | 7,424E-04 | -4,767E-05 | -1,073E-04 |
| 19 | 3,426E-02 | 3,252E-04 | -3,695E-04 | 1,274E-04 |
| 20 | 3,434E-02 | -3,163E-05 | 1,265E-05 | -4,965E-06 |
| 21 | 3,432E-02 | -2,123E-05 | -2,250E-06 | 1,712E-06 |
| 22 | 3,429E-02 | -2,060E-05 | 2,887E-06 | -2,167E-06 |
| 23 | 3,427E-02 | -2,132E-05 | -3,616E-06 | 6,721E-06 |
| 24 | 3,426E-02 | -8,394E-06 | 1,655E-05 | -2,491E-05 |
| 25 | 3,424E-02 | -5,004E-05 | -5,820E-05 | 2,583E-05 |
| 26 | 3,416E-02 | -8,894E-05 | 1,930E-05 | -6,652E-06 |
| 27 | 3,408E-02 | -7,030E-05 | -6,576E-07 | 1,202E-07 |
| 28 | 3,401E-02 | -7,126E-05 | -2,970E-07 | 5,606E-06 |
| 29 | 3,394E-02 | -5,503E-05 | 1,652E-05 | -2,303E-05 |
| 30 | 3,388E-02 | -9,109E-05 | -5,258E-05 | 2,384E-05 |
| 31 | 3,376E-02 | -1,247E-04 | 1,894E-05 | -6,537E-06 |
| 32 | 3,365E-02 | -1,065E-04 | -6,681E-07 | 1,623E-06 |
| 33 | 3,355E-02 | -1,029E-04 | 4,200E-06 | -5,571E-07 |
| 34 | 3,345E-02 | -9,620E-05 | 2,529E-06 | 7,146E-08 |
| 35 | 3,335E-02 | -9,092E-05 | 2,743E-06 | -2,036E-07 |
| 36 | 3,326E-02 | -8,605E-05 | 2,132E-06 | 3,194E-07 |
| 37 | 3,318E-02 | -8,083E-05 | 3,090E-06 | -1,453E-06 |
| 38 | 3,310E-02 | -7,900E-05 | -1,267E-06 | 5,151E-06 |
| 39 | 3,303E-02 | -6,608E-05 | 1,419E-05 | -1,946E-05 |

| t_j | a_j | b_j | c_j | d_j |
|-------|-----------|------------|------------|------------|
| 40 | 3,295E-02 | -9,609E-05 | -4,419E-05 | 1,991E-05 |
| 41 | 3,283E-02 | -1,247E-04 | 1,554E-05 | -5,422E-06 |
| 42 | 3,272E-02 | -1,099E-04 | -7,238E-07 | 1,374E-06 |
| 43 | 3,261E-02 | -1,072E-04 | 3,398E-06 | -4,399E-07 |
| 44 | 3,251E-02 | -1,018E-04 | 2,078E-06 | 5,242E-08 |
| 45 | 3,241E-02 | -9,745E-05 | 2,236E-06 | -7,388E-08 |
| 46 | 3,231E-02 | -9,320E-05 | 2,014E-06 | -3,502E-08 |
| 47 | 3,222E-02 | -8,928E-05 | 1,909E-06 | -4,093E-08 |
| 48 | 3,213E-02 | -8,559E-05 | 1,786E-06 | -3,529E-08 |
| 49 | 3,205E-02 | -8,212E-05 | 1,680E-06 | -3,315E-08 |
| 50 | 3,197E-02 | -7,886E-05 | 1,581E-06 | -3,043E-08 |
| 51 | 3,189E-02 | -7,579E-05 | 1,489E-06 | -2,817E-08 |
| 52 | 3,182E-02 | -7,289E-05 | 1,405E-06 | -2,607E-08 |
| 53 | 3,174E-02 | -7,016E-05 | 1,327E-06 | -2,417E-08 |
| 54 | 3,168E-02 | -6,758E-05 | 1,254E-06 | -2,244E-08 |
| 55 | 3,161E-02 | -6,514E-05 | 1,187E-06 | -2,086E-08 |
| 56 | 3,155E-02 | -6,283E-05 | 1,124E-06 | -1,942E-08 |
| 57 | 3,148E-02 | -6,064E-05 | 1,066E-06 | -1,810E-08 |
| 58 | 3,142E-02 | -5,856E-05 | 1,012E-06 | -1,689E-08 |
| 59 | 3,137E-02 | -5,659E-05 | 9,611E-07 | -1,578E-08 |
| 60 | 3,131E-02 | -5,471E-05 | 9,137E-07 | -1,476E-08 |
| 61 | 3,126E-02 | -5,293E-05 | 8,694E-07 | -1,383E-08 |
| 62 | 3,121E-02 | -5,123E-05 | 8,279E-07 | -1,296E-08 |
| 63 | 3,115E-02 | -4,962E-05 | 7,891E-07 | -1,216E-08 |
| 64 | 3,111E-02 | -4,807E-05 | 7,526E-07 | -1,142E-08 |
| 65 | 3,106E-02 | -4,660E-05 | 7,183E-07 | -1,074E-08 |
| 66 | 3,101E-02 | -4,520E-05 | 6,861E-07 | -1,012E-08 |
| 67 | 3,097E-02 | -4,386E-05 | 6,557E-07 | -9,486E-09 |
| 68 | 3,093E-02 | -4,257E-05 | 6,273E-07 | -9,103E-09 |
| 69 | 3,088E-02 | -4,135E-05 | 6,000E-07 | -7,990E-09 |
| 70 | 3,084E-02 | -4,017E-05 | 5,760E-07 | -9,785E-09 |
| 71 | 3,080E-02 | -3,905E-05 | 5,467E-07 | -8,882E-10 |
| 72 | 3,076E-02 | -3,796E-05 | 5,440E-07 | -3,204E-08 |
| 73 | 3,073E-02 | -3,697E-05 | 4,479E-07 | 8,614E-08 |
| 74 | 3,069E-02 | -5,354E-05 | 7,063E-07 | 1,738E-05 |

Anexo 4

Vectores de direcção para o cenário ascendente e descendente

| N _{asc.} = 18,35 | | | | N _{desc.} = 13,88 | | | |
|------------------------------|-------------------|----|-------------------|-------------------------------|--------------------|----|--------------------|
| t | N _{asc.} | t | N _{asc.} | t | N _{desc.} | t | N _{desc.} |
| 0 | 3,681 | 37 | 1,779 | 0 | -1,997 | 37 | -1,491 |
| 0,25 | 4,403 | 38 | 1,775 | 0,25 | -2,389 | 38 | -1,487 |
| 0,5 | 4,425 | 39 | 1,771 | 0,5 | -2,401 | 39 | -1,484 |
| 1 | 4,414 | 40 | 1,767 | 1 | -2,395 | 40 | -1,481 |
| 2 | 3,485 | 41 | 1,761 | 2 | -2,127 | 41 | -1,475 |
| 3 | 3,112 | 42 | 1,755 | 3 | -1,984 | 42 | -1,470 |
| 4 | 2,810 | 43 | 1,749 | 4 | -1,904 | 43 | -1,465 |
| 5 | 2,550 | 44 | 1,743 | 5 | -1,821 | 44 | -1,460 |
| 6 | 2,381 | 45 | 1,738 | 6 | -1,740 | 45 | -1,456 |
| 7 | 2,261 | 46 | 1,733 | 7 | -1,707 | 46 | -1,452 |
| 8 | 2,140 | 47 | 1,728 | 8 | -1,629 | 47 | -1,448 |
| 9 | 2,067 | 48 | 1,723 | 9 | -1,597 | 48 | -1,444 |
| 10 | 1,992 | 49 | 1,719 | 10 | -1,612 | 49 | -1,440 |
| 11 | 2,009 | 50 | 1,714 | 11 | -1,627 | 50 | -1,436 |
| 12 | 2,024 | 51 | 1,710 | 12 | -1,639 | 51 | -1,433 |
| 13 | 2,037 | 52 | 1,706 | 13 | -1,649 | 52 | -1,429 |
| 14 | 2,049 | 53 | 1,702 | 14 | -1,658 | 53 | -1,426 |
| 15 | 2,058 | 54 | 1,699 | 15 | -1,666 | 54 | -1,423 |
| 16 | 2,017 | 55 | 1,695 | 16 | -1,623 | 55 | -1,420 |
| 17 | 1,975 | 56 | 1,692 | 17 | -1,629 | 56 | -1,417 |
| 18 | 1,931 | 57 | 1,688 | 18 | -1,584 | 57 | -1,415 |
| 19 | 1,887 | 58 | 1,685 | 19 | -1,539 | 58 | -1,412 |
| 20 | 1,841 | 59 | 1,682 | 20 | -1,543 | 59 | -1,409 |
| 21 | 1,840 | 60 | 1,679 | 21 | -1,542 | 60 | -1,407 |
| 22 | 1,839 | 61 | 1,676 | 22 | -1,541 | 61 | -1,404 |
| 23 | 1,838 | 62 | 1,673 | 23 | -1,540 | 62 | -1,402 |
| 24 | 1,837 | 63 | 1,671 | 24 | -1,539 | 63 | -1,400 |
| 25 | 1,836 | 64 | 1,668 | 25 | -1,538 | 64 | -1,398 |
| 26 | 1,832 | 65 | 1,665 | 26 | -1,535 | 65 | -1,395 |
| 27 | 1,828 | 66 | 1,663 | 27 | -1,531 | 66 | -1,393 |
| 28 | 1,824 | 67 | 1,661 | 28 | -1,528 | 67 | -1,391 |
| 29 | 1,820 | 68 | 1,658 | 29 | -1,525 | 68 | -1,389 |
| 30 | 1,817 | 69 | 1,656 | 30 | -1,522 | 69 | -1,388 |
| 31 | 1,810 | 70 | 1,654 | 31 | -1,517 | 70 | -1,386 |
| 32 | 1,804 | 71 | 1,652 | 32 | -1,512 | 71 | -1,384 |
| 33 | 1,799 | 72 | 1,650 | 33 | -1,507 | 72 | -1,382 |
| 34 | 1,793 | 73 | 1,648 | 34 | -1,503 | 73 | -1,380 |
| 35 | 1,788 | 74 | 1,646 | 35 | -1,498 | 74 | -1,379 |
| 36 | 1,784 | 75 | 1,644 | 36 | -1,494 | 75 | -1,377 |

Anexo 5

Vectores colineares unitários das estratégias 2, 3 e 4

| tempo | N ₀ =1 | | |
|-------|---------------------|--------------|--------------|
| | Estratégia 2 | estratégia 3 | estratégia 4 |
| 0 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 0,25 | 0,001773 | 0,001765 | 0,001820 |
| 0,5 | -0,002076 | 0,008603 | -0,007488 |
| 1 | -0,003322 | -0,003685 | -0,004561 |
| 2 | -0,005675 | 0,023795 | -0,035197 |
| 3 | 0,027969 | -0,035623 | -0,047861 |
| 4 | 0,054464 | 0,055998 | -0,058344 |
| 5 | -0,075235 | -0,073966 | -0,065290 |
| 6 | 0,048231 | -0,079730 | -0,070222 |
| 7 | -0,091212 | -0,082691 | -0,072636 |
| 8 | 0,182401 | 0,178105 | 0,140618 |
| 9 | -0,100723 | -0,091478 | -0,079264 |
| 10 | 0,283615 | 0,229496 | 0,193562 |
| 11 | -0,111101 | -0,099362 | -0,085138 |
| 12 | -0,107253 | -0,095673 | -0,081552 |
| 13 | 0,400491 | 0,350217 | 0,397124 |
| 14 | -0,117032 | -0,103601 | -0,091298 |
| 15 | -0,110683 | -0,097624 | -0,085765 |
| 16 | -0,105333 | -0,092665 | -0,081230 |
| 17 | -0,098271 | -0,086065 | -0,075154 |
| 18 | -0,092011 | -0,080249 | -0,069824 |
| 19 | -0,086465 | -0,075107 | -0,065120 |
| 20 | -0,079532 | -0,068669 | -0,059223 |
| 21 | -0,072846 | -0,062524 | -0,053639 |
| 22 | -0,066033 | -0,056232 | -0,047900 |
| 23 | -0,058512 | -0,049283 | -0,041560 |
| 24 | -0,051100 | -0,042457 | -0,035347 |
| 25 | -0,044079 | -0,036001 | -0,029478 |
| 26 | -0,037261 | -0,029701 | -0,023729 |
| 27 | -0,031131 | -0,024109 | -0,018678 |
| 28 | -0,025327 | -0,018786 | -0,013849 |
| 29 | 0,757612 | 0,816914 | 0,828769 |
| 30 | -0,045504 | -0,042063 | -0,038395 |
| 31 | -0,040181 | -0,037143 | -0,033903 |
| 32 | -0,035221 | -0,032558 | -0,029718 |
| 33 | -0,030636 | -0,028320 | -0,025850 |
| 34 | -0,026431 | -0,024433 | -0,022302 |
| 35 | -0,022612 | -0,020902 | -0,019079 |
| 36 | -0,019173 | -0,017724 | -0,016178 |
| 37 | -0,016106 | -0,014888 | -0,013589 |
| 38 | -0,013395 | -0,012382 | -0,011302 |
| 39 | -0,011030 | -0,010196 | -0,009307 |
| 40 | -0,008983 | -0,008304 | -0,007580 |
| 41 | -0,007253 | -0,006704 | -0,006119 |
| 42 | -0,005773 | -0,005336 | -0,004871 |
| 43 | -0,004522 | -0,004180 | -0,003816 |
| 44 | -0,003474 | -0,003211 | -0,002931 |
| 45 | -0,002607 | -0,002410 | -0,002200 |
| 46 | -0,001898 | -0,001754 | -0,001601 |
| 47 | -0,001322 | -0,001222 | -0,001115 |
| 48 | -0,000862 | -0,000796 | -0,000727 |
| 49 | -0,000499 | -0,000461 | -0,000421 |
| 50 | -0,000216 | -0,000200 | -0,000182 |

Anexo 6 - Valor presente dos cash flows do título OT 4,10% Abr 2037 tendo em conta os cenários do QIS4 e steep

Maturidade 15-04-2037

| OT 4.10% Abr 2037 | | | EPTJ | | | | 3.304.823,83 € | 2.499.354,97 € | 4.265.633,47 € | 4.317.961,54 € |
|-------------------|----------------|-------|---------|--------|----------|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Data | CF | t | inicial | cresc. | decresc. | incl. | VP inicial | VP asc. | VP decresc. | VP incl. |
| 15-04-2008 | 148.918,91 € | 0,29 | 4,517% | 8,716% | 2,212% | 1,378% | 146.978,29 € | 145.196,71 € | 147.965,50 € | 148.324,13 € |
| 15-04-2009 | 149.326,91 € | 1,29 | 4,456% | 8,094% | 2,323% | 1,061% | 140.982,01 € | 134.517,91 € | 144.916,97 € | 147.295,78 € |
| 15-04-2010 | 149.326,91 € | 2,29 | 4,429% | 7,630% | 2,431% | 0,876% | 134.921,69 € | 125.383,80 € | 141.238,20 € | 146.359,87 € |
| 15-04-2011 | 149.326,91 € | 3,29 | 4,426% | 7,290% | 2,535% | 0,792% | 129.089,86 € | 117.480,89 € | 137.376,11 € | 145.485,64 € |
| 16-04-2012 | 149.736,02 € | 4,30 | 4,440% | 7,043% | 2,633% | 0,784% | 123.734,52 € | 110.642,28 € | 133.719,74 € | 144.774,79 € |
| 15-04-2013 | 148.917,79 € | 5,29 | 4,466% | 6,871% | 2,724% | 0,834% | 117.568,96 € | 103.512,83 € | 128.920,49 € | 142.488,99 € |
| 15-04-2014 | 149.326,91 € | 6,29 | 4,499% | 6,753% | 2,808% | 0,925% | 112.508,82 € | 97.627,67 € | 125.136,84 € | 140.882,54 € |
| 15-04-2015 | 149.326,91 € | 7,29 | 4,536% | 6,676% | 2,885% | 1,046% | 107.268,20 € | 91.769,59 € | 120.991,95 € | 138.357,07 € |
| 15-04-2016 | 149.326,91 € | 8,30 | 4,575% | 6,628% | 2,955% | 1,188% | 102.167,91 € | 86.169,08 € | 116.863,71 € | 135.307,71 € |
| 17-04-2017 | 150.142,90 € | 9,30 | 4,614% | 6,601% | 3,018% | 1,344% | 97.753,89 € | 81.254,69 € | 113.398,48 € | 132.494,29 € |
| 16-04-2018 | 148.917,79 € | 10,30 | 4,651% | 6,590% | 3,073% | 1,507% | 92.243,87 € | 75.547,51 € | 108.517,35 € | 127.511,44 € |
| 15-04-2019 | 148.917,79 € | 11,30 | 4,685% | 6,588% | 3,122% | 1,673% | 87.719,92 € | 70.757,96 € | 104.661,21 € | 123.277,06 € |
| 15-04-2020 | 149.326,91 € | 12,30 | 4,717% | 6,592% | 3,165% | 1,840% | 83.597,40 € | 66.383,57 € | 101.175,89 € | 119.086,60 € |
| 15-04-2021 | 149.326,91 € | 13,30 | 4,745% | 6,599% | 3,203% | 2,004% | 79.447,54 € | 62.088,50 € | 97.538,56 € | 114.385,27 € |
| 15-04-2022 | 149.326,91 € | 14,30 | 4,770% | 6,608% | 3,235% | 2,165% | 75.500,39 € | 58.052,83 € | 94.032,93 € | 109.569,46 € |
| 17-04-2023 | 150.145,14 € | 15,30 | 4,791% | 6,616% | 3,262% | 2,321% | 72.127,64 € | 54.549,42 € | 91.141,32 € | 105.248,71 € |
| 15-04-2024 | 148.510,91 € | 16,30 | 4,808% | 6,623% | 3,284% | 2,471% | 67.824,27 € | 50.452,85 € | 86.942,84 € | 99.278,24 € |
| 15-04-2025 | 149.326,91 € | 17,30 | 4,822% | 6,628% | 3,303% | 2,614% | 64.841,55 € | 47.436,47 € | 84.323,44 € | 95.007,95 € |
| 15-04-2026 | 149.326,91 € | 18,30 | 4,832% | 6,631% | 3,318% | 2,750% | 61.671,63 € | 44.370,29 € | 81.360,15 € | 90.279,03 € |
| 15-04-2027 | 149.326,91 € | 19,30 | 4,839% | 6,632% | 3,330% | 2,879% | 58.679,40 € | 41.519,30 € | 78.527,30 € | 85.667,18 € |
| 17-04-2028 | 150.145,14 € | 20,31 | 4,844% | 6,630% | 3,339% | 3,002% | 56.139,84 € | 39.062,49 € | 76.214,27 € | 81.604,27 € |
| 16-04-2029 | 148.917,79 € | 21,31 | 4,846% | 6,625% | 3,345% | 3,117% | 53.034,05 € | 36.298,27 € | 73.020,98 € | 76.648,00 € |
| 15-04-2030 | 148.917,79 € | 22,30 | 4,845% | 6,619% | 3,348% | 3,226% | 50.537,39 € | 34.027,86 € | 70.565,89 € | 72.526,99 € |
| 15-04-2031 | 149.326,91 € | 23,30 | 4,843% | 6,610% | 3,350% | 3,328% | 48.308,22 € | 32.001,42 € | 68.401,71 € | 68.759,49 € |
| 15-04-2032 | 149.326,91 € | 24,31 | 4,838% | 6,599% | 3,350% | 3,424% | 46.068,13 € | 30.027,25 € | 66.142,85 € | 64.963,72 € |
| 15-04-2033 | 149.326,91 € | 25,31 | 4,832% | 6,587% | 3,349% | 3,514% | 43.959,73 € | 28.197,96 € | 63.989,99 € | 61.360,69 € |
| 17-04-2034 | 150.145,14 € | 26,31 | 4,825% | 6,573% | 3,346% | 3,599% | 42.187,93 € | 26.633,19 € | 62.259,67 € | 58.237,55 € |
| 16-04-2035 | 148.917,79 € | 27,31 | 4,816% | 6,558% | 3,341% | 3,678% | 39.972,32 € | 24.841,87 € | 59.792,32 € | 54.535,34 € |
| 15-04-2036 | 148.918,91 € | 28,31 | 4,806% | 6,541% | 3,336% | 3,753% | 38.198,63 € | 23.372,37 € | 57.912,59 € | 51.473,05 € |
| 15-04-2037 | 3.791.446,60 € | 29,31 | 4,796% | 6,524% | 3,330% | 3,822% | 929.789,83 € | 560.178,15 € | 1.428.584,23 € | 1.236.770,69 € |

Bibliografia

- Anderson, N., Sleath, J. (1999), New Estimates of the UK Real and Nominal Yield Curves, *Bank of England Quarterly Bulletin*, pp. 384-392
- Blitzer, D. M., Dash, S., Murphy, P. (2008), Equity Duration – Updated Duration of the S&P 500, Standard & Poor's
- Choudhry, M. (2004), *Analysing and Interpreting the Yield Curve*, Wiley
- Choudhry, M. (2005), *Fixed Income Securities and Derivatives Handbook: Analysis and Valuation*, *Bloomberg Press*
- Fabozzi, F. J. (1999), *Duration, Convexity, and Other Bond Risk Measures*, Wiley
- Fisher, M., Nychka, D., Zervos, D. (1995), Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines, Board of Governors of the Federal Reserve System, *Federal Reserve Board Working Paper 95-1*
- Fisher, L., Weil, R., Coping with the Risk of Interest-rate Fluctuations: Return to Bondholders from Naïve and Optimal Strategies, *The Journal of Business*, No. 4, pp 44
- Klugman, S.A., Panjer, H. H., Willmot, G. E. (2004), *Loss Models from data to decisions*, Second Edition, Wiley-Interscience
- La Grandville, O. (2001), *Bond Pricing and Portfolio Analysis: Protecting Investors in the Long Run*, Cambridge Massachusetts, The MIT Press
- Macaulay, F. R. (1938), Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. since 1856, National Bureau of Economic Research
- McCulloch, J. H. (1975), The Tax Adjusted Yield Curve, *Journal of Business*, Vol. 30, No. 3, pp 811-830

- Nawalkha, S. K., Chambers, D. R. (1996), An Improved Immunization Strategy: The M-Absolute, *Financial Analysts Journal*, Vol. 52, No. 5, pp 69-76
- Nawalkha, S. K., Soto, G. M., Beliaeva (2005), Interest Rate Risk Modeling, Wiley
- Nelson, C. R., Siegel, A. F. (1987), Parsimonious Modeling of Yield Curves, *The Journal of Business*, Vol. 60, No. 4, pp 473-489
- Reitano, R. R. (1991), Multivariate Duration Analysis, *Transactions of Society of Actuaries*, Vol. 43, pp 335-392
- Reitano, R. R. (1992), Nonparallel Yield Curve Shifts and Convexity, *Transactions of Society of Actuaries*, Vol. 44, pp 479-494
- Redington, F. M. (1952), Review of the Principle of Life Office Valuations, *Journal of the Institute of Actuaries*, No. 18, pp 286-340
- Svensson, L. (1995), Estimating forward interest rates with the extended Nelson & Siegel method, *Sveriges Riskbank Quarterly Review*, No. 3, pp 13
- Waggoner, D. F. (1997), Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices, *Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper*, No. 97-110